Les marchés financiers gèrent les risques liés à l'incertitude des prix futurs. La modélisation de cette incertitude repose sur les prix futurs des actifs définis pour chaque scénario (ou état futur).
A partir de ces données, la valorisation consiste à calculer un prix présent pour chaque actif.
La théorie de l'arbitrage à travers l'**Absence d'Opportunité d'Arbitrage** (AOA), va contraindre les prix présents dans une zone de validité. Nous proposons de définir la zone de validité de ces prix présents.
Chaque solution de prix présent va générer un taux sans risque (TSR) et une mesure de probabilité dite 'risque-neutre' utile à la valorisation des portefeuilles dans ce marché.
Une contrainte supplémentaire sur le TSR limitera encore plus notre zone de validité des prix présents.

Une présentation graphique en 2 dimensions avec 2 actifs permet d'illustrer géométriquement le raisonnement qui peut être extrapolé à plus de 2 dimensions. On retient deux graphiques plans :
Le plan des prix : chaque scénario est représenté par un point avec ses deux coordonnées correspondant aux prix futur de chaque actif. Le prix présent sera lui aussi représenté par un point. Notre objectif est de définir la zone acceptable pour le prix actuel dans ce plan.
Le plan des portefeuilles : donne le prix des portefeuilles, les coordonnées étant les composantes du portefeuille en chaque actif. Les portefeuilles de valeur nulle sont représentés par des droites passant par l'origine.

Un exemple chiffré à 2 actifs est indispensable :
Exemple :
Prix futurs de l'actif 1, dans l'état Haut : 90, dans l'état Bas : 55
Prix futurs de l'actif 2, dans l'état Haut : 150, dans l'état Bas : 60

Nous pouvons résumer ces 4 données dans une matrice 2x2, qu'on va intituler ***matrice de marché M** :*

$$M = \begin{pmatrix} 90 & 150 \\ 55 & 60 \end{pmatrix}$$

Nous plaçons en colonne les actifs, et en ligne les scénarios (scénario haut en haut !)
Prix présent à valider P : 60 et 85
Dans le graphique des PRIX, un point représent un scénario futur ou un prix présent.
L'objectif est d'identifier sur ce graphique la zone de validité pour le point représentant le prix présent P. Notons P ce vecteur ligne et P', le même vecteur transposé en colonne.

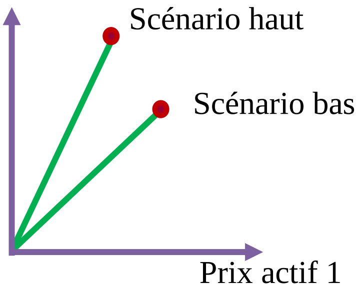

Fig1-Plan PRIX : points des prix futurs

1 - Prix Admissibles

Définition : Absence d'Opportunité d'arbitrage (AOA) : comment éviter de gagner «à coup sûr», donc sans risque, à partir d'un portefeuille de valeur nulle.

Dans le plan des portefeuilles (PTF), la valeur des portefeuilles dans chaque scénario est donnée par les équations suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} Vh = 90\,x + 150\,y \\ Vb = 55\,x + 60\,y \end{array} \right.$$

Les droites d'équations respectives :

$$\left| \begin{array}{l} 90\,x + 150\,y = 0 \\ 55\,x + 60\,y = 0 \end{array} \right.$$

représentent les portefeuilles de valeur future nulle. Ces deux droites passent par l'origine et séparent le plan en 3 zones :
- Zone A, les deux portefeuilles sont positifs.
- Zone B, les deux portefeuilles sont négatifs.

- Zone C, les deux portefeuilles sont de signes différents.

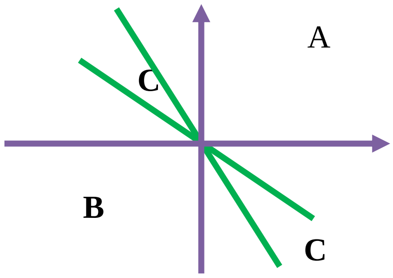

Fig2-Plan PTF : droites des PTF de valeur future nulle.

L'AOA oblige à ne conserver que la zone C, la zone entre les 2 droites 'futures' (vertes sur le graphique).
Les prix présents génèrent la droite des portefeuilles de valeur présente nulle.
Dans notre exemple d'équation :
*60 * b1 + 85 * b2= 0*

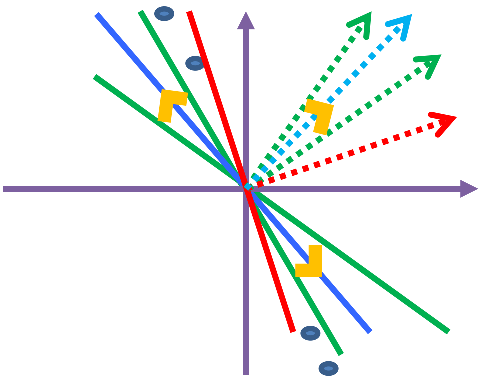

Fig3-Plan PTF : droites des PTF de valeur nulle, admissible en bleu, non admissible en rouge. Normales en pointillés.

Graphiquement, la droite de prix bleu est admissible, la droite de prix rouge est non admissible. Les points noirs représentent les portefeuilles arbitrables.
Un autre critère de non arbitrage utilise les pentes: la pente de la droite des prix doit être comprise entre les pentes des droites des prix des deux scénarios futurs.
Noter exemple donne :
-pente scénario haut= -150/90=-1,67
-pente scénario bas= -60/50=-1,09
-pente prix = -60/84=-1,42
Comme -1,67 < -1,42 < -1,09, nos prix sont AOA.

Le même critère s'applique aux normales à ces droites – nous retiendrons ce critère avec n=3, en prenant les normales aux plans qui correspondent aux portefeuilles de valeur nulle.
A partir de l'équation de ces droites : a.x+b.y=0, l'équation de la normale est a.x-b.y=0 de pente de a/b, au lieu de –a/b pour la droite d'origine, et passe par le point (b,a). Les droites du plan PTF sont associées aux points du plan PRIX (orthogonalité projective entre droite et point). Nos critères deviennent applicables au plan des PRIX.

Définition : un portefeuille Arrow-Debreu (PTF AD), est un portefeuille qui rapporte l'unité 1 dans un seul état futur et 0 dans tous les autres états futurs.

Dans notre exemple, les PTF AD sont solutions du système suivant, soit X (x1, x2) ce portefeuille :

$$\left|\begin{array}{l} 90 * x1 + 150 * x2 = 1 \\ 55 * x1 + 60 * x2 = 0 \end{array}\right.$$

La solution est : (x1,x2)=(-0,0211 ; 0,0193)
Le second PTF AD Y (y1,y2), rapportant 0 dans l'état haut et 1 dans l'état bas vérifie :

$$\left|\begin{array}{l} 90 * y1 + 85 * y2 = 0 \\ 55 * y1 + 150 * y2 = 1 \end{array}\right.$$

La solution est égale à : (y1,y2)=(0,0526 ; -0,0316)

Présentation algébrique pour obtenir les PTF AD :
Le problème précédent sous forme matricielle devient : $\begin{pmatrix} 90 & 150 \\ 55 & 60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x1 & y1 \\ x2 & y2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Et se résout par inversion de la matrice de Marché M : $M^{-1} = \begin{pmatrix} x1 & y1 \\ x2 & y2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}0211 & 0{,}0526 \\ 0{,}0193 & 0{,}0316 \end{pmatrix}$

Interprétons la relation :

(prix marché) x (ptf AD) = 1 **(1.1)**

Cela signifie que la matrice : (M^{-1}), permet de passer des actifs quelconques à des actifs unitaires.

Ainsi, les PTF AD deviennent générateurs de tous les portefeuilles.

A partir de la composition des PTF AD, calculons leur valeur présente, par la transformation précédente (M^{-1}). Une multiplication matricielle $P.(M^{-1})=Q'$ permet d'obtenir ces deux prix :

$$(60\ 85)\begin{pmatrix}90 & 150\\ 55 & 60\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}0{,}3772\\ 0{,}4737\end{pmatrix}$$

Soit, P = Q'.M

$$(60\ 85) = \begin{pmatrix}0{,}3772\\ 0{,}4737\end{pmatrix}\begin{pmatrix}90 & 150\\ 55 & 60\end{pmatrix}$$

On obtient les valeurs x=0,3772 pour le portefeuille X et y=0,4737 pour le portefeuille Y.

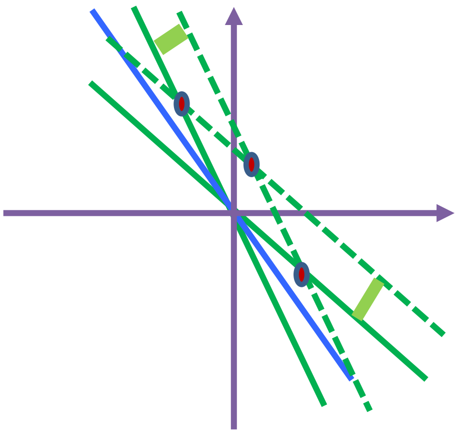

Fig4-Plan PTF : droites de valorisation 0 et 1, avec intersactions : ptf AD.

Une conséquence 'admirable' est la possibilité d'extraire de ces simples données un taux sans risque et une probabilité risque-neutre.

2 - Détermination du taux sans risque.

Le taux sans risque (TSR) s'obtient à partir du portefeuille composé de la somme de tous les portefeuilles Arrow-Debreu. En effet, ce portefeuille rapporte 1 dans tous les états futurs. Nous n'avons plus d'incertitude. La valeur présente de ce portefeuille est égale à la somme des valeurs de tous les portefeuilles Arrow-Debreu.

Si cette valeur est inférieure à 1, le TSR est positif, si cette valeur est supérieure à 2, le TSR est négatif.

Soit S la somme des valeurs des portefeuilles AD, le taux sans risque r est égal = S (1+r)=1, soit r = 1/S-1, en prenant l'hypothèse d'une durée standard d'une année.

Dans notre exemple,

La somme des valeurs des deux portefeuilles AD est égale à : S = x + y = 0,37772 + 0,4737 = 0,8509 ; le taux sans risque s'en déduit : r = 1/0,8509 -1 = 17,53%/an

Le TSR varie en fonction des prix actuels. Effectuons un calcul 'inverse': quels sont les prix présents pour lesquels le taux sans risque est nul ? Le TSR nul est identique à la relation x+y=1 : valeur présente égale à valeur future.

A partir de l'expression $Q'=P.(M^{-1})$ qui donne la valeur actuelle des portefeuilles X et Y, si P=M, on obtient Q' égal à l'identité, et donc 2 portefeuilles de TSR nul, tel que x+y=1. P=M signifie que l'on prend les prix présents égaux à chaque scénario de prix futurs.

$$\begin{pmatrix}90\\ 55\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}90 & 150\\ 55 & 60\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}150\\ 60\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}90 & 150\\ 55 & 60\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

Conclusion : si les prix présents sont égaux à un scénario de prix futur, alors le TSR est nul.

Graphiquement en 2D : la droite de TSR nul passe par les 2 points de prix futurs.

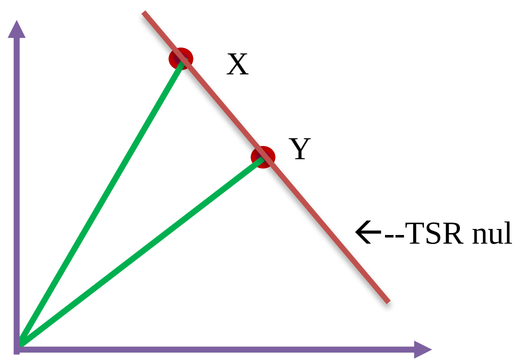

Fig5-Plan PRIX : droite de TSR nul en violet

Equation de la droite de TSR nul.

A partir de la relation générale :

$$\begin{pmatrix} x1 & y1 \\ x2 & y2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p1 \\ p2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Nous obtenons la condition suivante entre p1 et p2, les prix actuels :

x1.p1+y1.p2 = x

x2.p1+y2.p2 = y

si x+y=1, alors TSR=0% signifie :

x1.p1+y1.p2 + x2.p1+y2.p2 = 1

et la droite de TSR nul est d'équation :

(x1+x2).p1+(y1+y2).p2 = 1

-0,018.p1+0,0211.p2=1

Cette droite passe bien par les points (90,55) et (150,60).

Le système de prix correspondant au milieu du segment XY est (130,57.5) et génère un TSR nul.

$$\begin{pmatrix} 130 \\ 57.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 & 150 \\ 55 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

Par extension, les droites de TSR constant, sont des droites parallèles à la droite de TSR nul.

Dans quel sens évolue le TSR : si la somme des valeurs des portefeuilles AD est inférieure à un, le TSR sera positif. Dans ce cas, les prix deviennent de plus en plus petits et tendent donc vers zéro. Le demi-plan contenant zéro est le demi-plan de TSR positif.

Un TSR positif va limiter la zone de prix présents admissibles au triangle (O,X,Y).

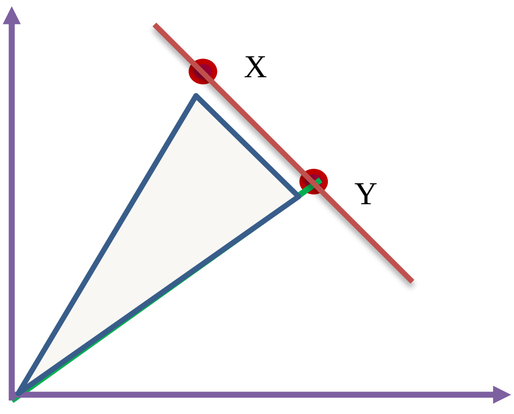

Fig6-Plan PRIX : zone admissible (O,X,Y) si TSR>0.

Cas Particulier : dans le cas où les deux droites de scénarios futurs sont identiques (prix futurs proportionnels), l'AOA impose un prix actuel proportionnel aux prix futurs.

Un calcul direct du TSR est possible à partir des données initiales. La résolution classique du système M.X=1 passe par l'utilisation des déterminants et des formules de Cramer.

A partir des 3 déterminants suivants :

$$\mathrm{D0} = \det(M) = \begin{pmatrix} 90 & 150 \\ 55 & 60 \end{pmatrix}$$=90.60-55.150=-2850

Première ligne de M et Prix :

$$\mathrm{D1} = \det(L_1(M).P) = \begin{pmatrix} 90 & 150 \\ 60 & 85 \end{pmatrix}$$=90.85-60.150=-1350

Prix et seconde ligne de M :

$$\mathrm{D2} = \det(P.L_2(M)) = \begin{pmatrix} 60 & 85 \\ 55 & 60 \end{pmatrix}$$=60.60-55.85=-1025

Avec les valeurs absolues des déterminants : A_i=ABS(D_i) :

$$1 + TSR = \frac{A0}{A1 + A2}$$

Sachant que les demi-déterminants mesurent des surfaces triangulaires s'appuyant sur les deux vecteurs du déterminant :

- A0/2 = surface (O X Y)
- A1/2 = surface (O X P)
- A0/2 = surface (O Y P)

TSR = Surface Verte / Surface Orange

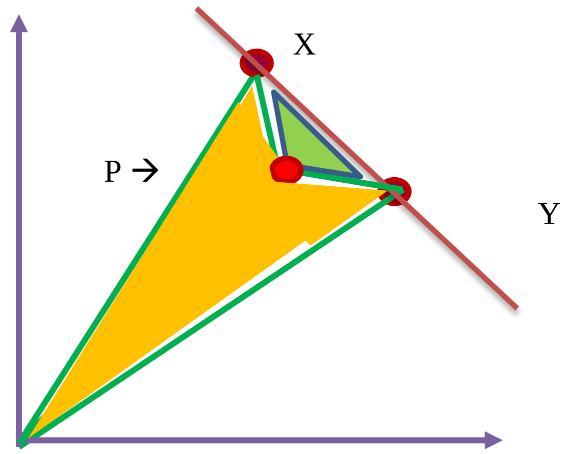

Fig7-Plan PRIX : TSR = Surface Verte/Surface Orange.

3 - Probabilité risque-neutre.

La probabilité risque-neutre permet de valoriser un portefeuille quelconque de composante (a,b). Ce portefeuille est égal à une combinaison linéaire des PTF AD :

(a , b) = a . (1 , 0) + b .(0 , 1)

Sa valorisation est égale à la même pondération des valeurs des PTF AD : x et y.

V(a , b) = a . V(1 , 0) + b .V(0 , 1)

Valorisation(a , b) = a . x + b .y (3.1)

Exemple :

V(a,b) = a.*0,37772 + b.0,4737*

Cette formule n'est pas conforme à une espérance mathématique, car x+y=1/(1+TSR), et donc différent de 1.

Définition : la probabilité risque-neutre est égale à la valeur future du PTF AD : (p,q)

p = x * (1+TSR)

q = y * (1+TSR) (3.2)

Nous vérifions bien : p+q=1

Exemple :

p = x.(1+TSR) = 0,3772(1,1753) = 0,4433

q = y.(1+TSR) = 0,4737(1,1753) = 0,5567

La valorisation de portefeuille (a,b) devient égale à l'espérance mathématique sous cette probabilité:

Valorisation(a,b) = a.p + b.q (3.3)

4 - Application numérique avec 3 actifs

Le modèle précédent s'applique à un nombre quelconques d'actifs, à condition d'avoir le même nombre de scenarios que d'actifs.

Développons un exemple avec n=3.

Matrice de marché :

$$M = \begin{pmatrix} 60 & 60 & 80 \\ 90 & 110 & 130 \\ 110 & 110 & 110 \end{pmatrix}$$

Vérifions si le vecteur des prix actuels (60 105 100) est admissible.

$$1/M = \begin{pmatrix} 0.0500 & -0.0500 & 0.0227 \\ -0.1000 & 0.0500 & 0.0136 \\ 0.0500 & 0.0000 & -0.0273 \end{pmatrix}$$

Les valorisations des 3 PTF AD sont :

X = 0.0227 Y = 0.6136 Z = 0.2727

De somme S = 0,9091 donnant un TSR=10%

Probabilités RN : p = 0.250 q=0.666 r=0.300

La condition de non arbitrage, ne peut plus s'appuyer sur les pentes des droites de portefeuilles de valeur nulle.

Une solution (pas simple), consiste à passer par les normales des hyperplans correspondant aux portefeuilles de valeur nulle. La condition AOA exige que ces normales appartiennent à l'intérieur du cône pyramidal dont les côtés s'appuient deux à deux sur ces normales.

Un calcul algébrique s'en déduit.

Avec n=3, les 3 vecteurs prix donnent les équations des plans de valorisation nulle, passant par l'origine. Les vecteurs normaux sont les coefficients de ces plans. Un produit vectoriel deux à deux, donne l'équation des plans du cône pyramidal. Un produit scalaire entre ces plans et le vecteur des prix donne les projections. Si ces projections sont toutes trois de même signe, la condition AOA est satisfaite.

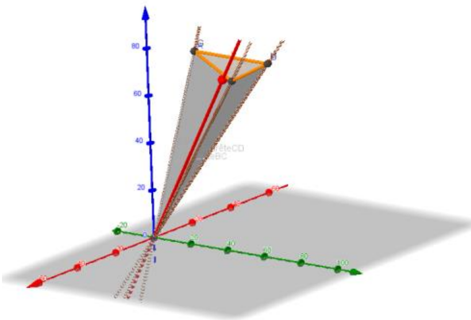

Fig9-Cas n=3, cône pyramidal.

Ex : les équations des 3 plans du cône sont :

-2200 x + 0 y + 1200 z =0

-2200 x + 2 200 y – 2200 z =0

1200 x -1000 y – 600 z =0

Et les 3 projections : -12000 -1000 -27000

de même signe. La condition AOA est vérifiée.

5 - Conclusion.

La démarche présentée n'est pas si étonnante que cela: nous sommes passés d'une représentation du marché par M, à une représentation par I, la matrice identité représentant les portefeuilles AD qui deviennent ainsi générateurs de tous les portefeuilles par combinaison linéaire. Le passage s'effectue par une multiplication par M^{-1}. La même transformation appliquée aux prix nous donne les prix actuels x et y de ces portefeuilles, prix servant à valoriser tous les portefeuilles avec la probabilité risque-neutre.

$$\begin{pmatrix} \mathrm{P11} & \mathrm{P12} \\ \mathrm{P21} & \mathrm{P22} \\ \mathrm{P1} & \mathrm{P2} \end{pmatrix} \xrightarrow{M^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \mathrm{x} & \mathrm{y} \end{pmatrix}$$

$$(x + y)(1 + TSR) = 1$$

$$\mathrm{p} = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x} + \mathrm{y}} \qquad \mathrm{q} = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x} + \mathrm{y}}$$

Il est étonnant que la zone de validité des prix présents soit si étroite à partir d'une loi d'AOA 'faible' : sans contrainte sur le TSR, la zone de validité se limite à la région comprise entre les droites des prix futurs (droites passant par l'origine). Cette zone est d'autant plus petite que les points futurs seront proches.

Si de plus, le TSR est fixé, par exemple à un montant positif faible de l'ordre de quelques pourcents, la zone admissible se limite à un segment parallèle à la droite (X,Y), et comprise dans le triangle (0,X,Y).

Une autre interprétation consiste à dire que le prix actuel en valeur non actualisée se situe sur le segment (X,Y), et qu'ensuite l'actualisation les rapproche de l'origine si le TSR est positif ou l'éloigne si le TSR est négatif.

En dimension supérieure, cette interprétation reste valable :

- le prix présent en valeur non actuelle appartient à l'hyperplan défini par les n prix futurs
- l'actualisation déplace se prix sur une droite passant par l'origine d'un écart proportionnel au TSR.

Nous en tirons le théorème suivant :

Th : dans un marché complet avec n actifs et n scénarios futurs, à partir des n prix futurs de chacun des n actifs, la zone admissible des n prix présents non actualisés appartient à la clôture algébrique des n prix futurs appartenant à l'hyperplan formé de ces n points dans l'espace des prix à n dimension.

Nous avons traité le cas d'un marché complet : égalité du nombre d'actifs et de scénarios. Reste à traiter le cas d'un marché incomplet.

-/-/-

Références :

Steven E. Shreve.

- *YouTube "lessons learned from the financial crisis", 1h09, https://youtu.be/pO9hKFA3Mns*
- *Stochastic Calculus for Finance, The binomial Asset Pricing Model, T1, Springer 188 pages, 2004.*
- *Stochastic Calculus for Finance, The Continuous Time Model, T2, Springer 550 pages, 2010.*

John van der Hoek, Robert J.Elliot

- *Binomial Model in Finance, Springer, 300 pages,2006.*

Eliezer Z. Prisman

- *Pricing Derivatives Securities, 555 pages, 2000.*

Ales Cerny

- *Mathematical Techniques in Finance, 380 pages, 2004.*

-/-/-