



La valorisation des options est un domaine de la finance mathématique qui fait appel à des méthodes complexes tout particulièrement dans le domaine continu. Par contre, il est plus simple d'aborder les concepts et les méthodes dans avec une approche discrète. Nous présentons donc l'application du modèle binomial aux options digitales pour commencer.

Dans l'article, nous utilisons la convention informatique suivante :  $(A > B)$  est égal à 1 si A est supérieur à B, sinon est égal à 0.

## 1–Définitions.

### Définition : Options Digitales

Les options digitales sont des contrats financiers bilatéraux, reposant sur l'évolution d'un sous-jacent S, avec un pay-off conditionnel défini à maturité T.

Avec K le prix d'exercice fixé par avance, le pay-off de l'option digitale Cash ou Rien (COR) est :

Call digital COR :  $(S > K) \cdot 1$

Put digital COR :  $(K < S) \cdot 1$

Pour l'option digitale Titre ou Rien (TOR) :

Call digital TOR :  $(S > K) \cdot S$

Put digital TOR :  $(K < S) \cdot S$

A partir de ces deux types d'options, il est possible de recomposer le pay-off des Calls et Puts traditionnels :

Call =  $(S > K) \cdot (S - K)$  (1.1)

Put =  $(S < K) \cdot (S - K)$

## 2–Modèle binomial à une période.

Le modèle binomial d'option utilise deux actifs : un actif sans risque et un actif risqué. La **théorie de l'arbitrage**, permet d'obtenir les probabilités risque-neutre nécessaires à la valorisation. Le taux sans risque (TSR) issu

du modèle est bien entendu égal à celui de l'actif sans risque.

Le modèle binomial à une période est défini par la matrice de marché suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 + R & u \cdot S \\ 1 + R & d \cdot S \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Le prix futur de l'actif sans risque est égal à  $1+R$ , quel que soit le scénario.

Le prix du sous-jacent, passe de S à  $u \cdot S$  ou  $d \cdot S$ , selon les scénarios « up » et « down ».

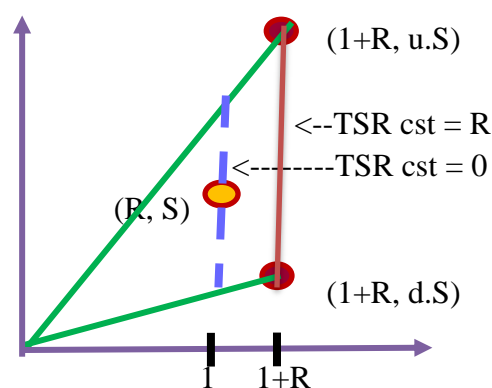


Fig-1:Plan PRIX : avec actif risqué et actif sans risque.

La condition AOA devient :

$$d < 1+R < u \quad (2.2)$$

Condition qu'on retrouve en comparant les pentes des 2 scénarios futurs et du prix actuel :

$$\frac{u \cdot S}{(1 + R)} ; \frac{d \cdot S}{(1 + R)} \text{ et } \frac{S}{1}$$

Les valorisations des PTF AD s'obtient par inversion de la matrice de marché M :

Posons le déterminant  $D = (1+R) \cdot S \cdot (d-u)$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} d \cdot S/D & -u \cdot S/D \\ -(1+R)/D & (1+R)/D \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} d/(1+R)(d-u) & -u/(1+R)(d-u) \\ -1/S \cdot (d-u) & 1/S \cdot (d-u) \end{pmatrix}$$

Connaissant dans ce cas de figure, les prix actuels comme étant  $(1, S)$ , le calcul des valeurs des PTF AD donne :

$$X = (d \cdot S/D) \cdot 1 - ((1+R)/D) \cdot S = (d - (1+R)) / ((1+R)(d-u))$$

$$Y = -(u.S/D).1 + ((1+R)/D).S = -(u + (1+R))/(1+R)(d-u)$$

Soit

$$X = \frac{1}{(1+R)} \frac{(1+R) - d}{(u-d)} \quad (2.2)$$

$$Y = \frac{1}{(1+R)} \frac{u - (1+R)}{(u-d)} \quad (2.3)$$

Avec  $X+Y=1/(1+R)$

Les probabilités RN deviennent:

$$p = \frac{(1+R) - d}{(u-d)} \quad (2.4)$$

$$q = \frac{u - (1+R)}{(u-d)} \quad (2.5)$$

Avec  $p+q=1$

Changement de probabilité.  
Le couple de probabilités RN précédent possède une propriété complémentaire à (2.5) :

$$p \cdot d + q \cdot u = (1+R) \quad (2.6)$$

Relation facile à vérifier.

Cette relation permet de définir une seconde probabilité :

$$p^* = \frac{p \cdot u}{(1+R)} = \frac{(1+R) \cdot u - d \cdot u}{(u-d) \cdot (1+R)} \quad (2.7)$$

$$q^* = \frac{q \cdot d}{(1+R)} = \frac{u \cdot d - (1+R) \cdot d}{(u-d) \cdot (1+R)} \quad (2.8)$$

Avec :  $p^* + q^* = 1$

Exemple :  
Prenons un actif sans risque, de taux d'intérêt  $R=2\%$  et un actif risqué avec  $u=1,05$  et  $d=0,95$ .

$$M = \begin{pmatrix} 1 + 0,02 & 1,05 \\ 1 + 0,02 & 0,95 \end{pmatrix}$$

L'inversion de  $M$ , donne pour la valorisation des ptf AD :

$$X = 0,6863 \quad Y = 0,2941$$

Et les probabilités RN :

$$p = 0,7000 \quad q = 0,3000$$

$$p^* = 0,7296 \quad q^* = 0,3794$$

### 3-Modèle binomial sur plusieurs périodes.

En mode discret, la méthode de valorisation des options est la méthode binomiale. Le modèle binomial consiste à simuler l'évolution des marchés à travers deux arbres binaires : l'arbre des prix et l'arbre des probabilités. Par convention, ces arbres seront horizontaux, avec la racine à gauche.

#### Arbre des prix.

L'arbre des prix utilise trois paramètres :

- Le prix actuel, qui est le prix de la racine de l'arbre.
- L'incrément vers le haut, noté  $u$
- L'incrément vers le bas, noté  $d$ .

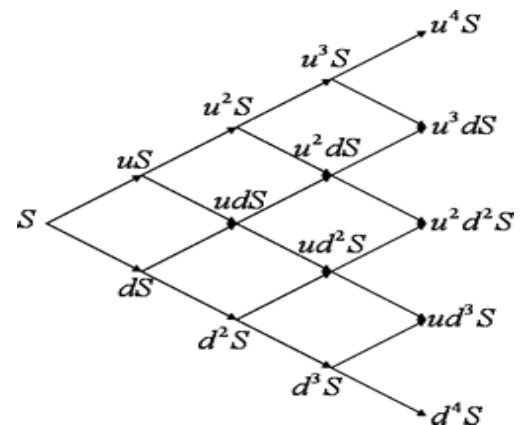


Fig-2: arbre binomial des prix à 4 périodes.

Le passage du prix présent au prix terminal passe par un chemin comportant  $n$  tronçons. Chaque tronçon est un mouvement  $u$  ou  $d$ . Un chemin est représenté par une suite de 1 pour  $u$  ou de -1 pour  $d$ .

Ex : (1 -1 -1 -1 -1)

Le nombre total de chemin est donc :  $2^n$ .

Chaque valeur terminale est égale à :

$$S_i = S \cdot u^i \cdot d^{n-i} \quad (3.1)$$

Avec  $i$  fois  $u$ , et donc  $(n-i)$  fois  $d$ .

Dans cette formule, les indices permettent de numérotter les valeurs terminales de zéro à  $n$ , en partant par le 'bas'.

Avec un arbre à  $n$  périodes, les propriétés de l'arbre des prix sont :

- L'arbre est recombinant – la valeur atteinte après un chemin haut+has est identique à la valeur atteinte après un chemin bas+haut, car la multiplication est commutative :  $u.d=d.u$

-  $(n+1)$  valeurs terminales et  $n$  valeurs intermédiaires, soit un total de  $2n+1$  valeurs traversées.

- Le maximum est  $u^n.S$

- Le minimum est  $d^n.S$

- Si  $n$  est pair, la valeur du milieu est égale à  $S.(ud)^{(n/2)}$ .

Il est souvent utile de passer au logarithme (népérien) pour les valeurs.

Dans ce cas, la relation précédente s'écrit :

$$\ln(S_i) = \ln(S) + i.\ln(u) + (n-i).\ln(d) \quad (3.2)$$

Ainsi, les distances deviennent linéaires et égales : l'écart entre deux valeurs terminales étant  $\ln(u/d) = \ln(u) - \ln(d)$ .

### Calibration :

Les facteurs  $u$  et  $d$ , représentent la variabilité du sous-jacent, ce qu'on nomme en finance la volatilité. Pour être complet, notre modèle doit donc relier  $u$  et  $d$ , avec la volatilité. Plusieurs modèles existent, nous retiendrons le modèle de Cox Ross et Rubinstein (CRR) suivant :

$$u = e^{\sigma\sqrt{T/n}} \quad d = e^{-\sigma\sqrt{T/n}} \quad (3.3)$$

Ce modèle est particulier, car  $u=1/d$  et donc  $u.d=1$  : cela possède l'avantage de générer un arbre des prix horizontal : la valeur « milieu » (lorsqu'elle existe) est égale à la valeur d'origine.

Notons que  $u$  et  $d$  dépendent uniquement de la volatilité  $\sigma$  et de la durée  $T$  :  $u$  et  $d$  sont donc sans unité car l'unité de l'écart type  $\sigma$  est  $T^{-(1/2)}$  (la variance étant en % par année).

### Arbre des probabilités

La probabilité utilisée est la loi binomiale. L'arbre des probabilités est obtenu de la même façon que l'arbre des prix mais en remplaçant

$S$  par  $1$ ,  $u$  et  $d$ , par  $p$  et  $q$ , les probabilités risque-neutre.

La probabilité du nœud terminal  $i$  devient:

$$P = \binom{n}{i} . p^i . q^{n-i}$$

Avec  $\binom{n}{i}$ , le coefficient du binôme, comptant le nombre de chemins possibles pour atteindre le nœud terminal à partir de l'origine : choix de  $i$  valeurs parmi  $n$  (choix de  $i$  mouvements  $u$  parmi  $n$  mouvements). Remarquons que choisir  $i$  fois  $u$ , revient à 'antichoisir'  $(n-i)$  fois  $d$ , d'où :

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$$

### 4-Valorisation.

**Définition :** la valeur présente d'un instrument financier est égale à l'espérance mathématique des flux futurs actualisés.

$$VP = \frac{1}{(1+R)^T} \sum E(Flux)$$

Les étapes de calcul de la valorisation sont :

- Calculer le pay-off pour chaque valeur terminale
- Multiplier ce pay-off par la probabilité du nœud terminal
- Faire la somme et actualiser avec le TSR.

Il est possible d'obtenir une formule ou un algorithme pour le calcul de l'option digitale COR dans le cas où celle-ci distribue  $K$  au lieu d'une unité.

Dans le cas d'un Call :

$$\frac{K}{(1+R)^T} \cdot \sum_{i=wc}^n \binom{n}{i} . p^i . q^{n-i}$$

Dans le cas d'un Put : (4.1)

$$\frac{K}{(1+R)^T} \cdot \sum_{i=0}^{wp} \binom{n}{i} . p^i . q^{n-i}$$

La différence est l'indice de sommation. Dans le cas du Call, le pay-off est non nul pour les valeurs terminales élevées : on somme de  $wc$  à  $n$ . Dans le cas du Put, le pay-off est non nul pour les petites valeurs terminales : on somme de  $0$  à  $wp$ .

w est l'indice de la valeur terminale associé au prix d'exercice K. Deux nœuds terminaux encadrent cette valeur K. La formule suivante donne une valeur de K décimale comprise entre 0 et n (si K ne dépasse pas la valeur maximale de l'arbre..

$$w = \frac{\ln\left(\frac{K}{S}\right) - n \cdot \ln(d)}{\ln(u/d)} \quad (4.2)$$

Les formules (3.3) utilisent des indices entiers wc et wp, obtenus en arrondissant w :

$$wp = \text{arrondi.inf}(w)$$

$$wc = \text{arrondi.sup}(w)$$

Ainsi :  $wc + wp = n - 1$

La valorisation des options TOR utilise le changement de probabilité de  $(p, q)$  à  $(p^*, q^*)$ .  
Démonstration dans le cas d'un Call.

On remplace K par les  $S_i$  terminaux ans la formule de valorisation de l'option COR pour donner:

$$\frac{1}{(1+R)^T} \cdot \sum_{i=wc}^n S_i \cdot \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i}$$

Remplaçons l'expression de  $S_i$  par :

$$S_i = S \cdot u^i \cdot d^{n-i}$$

Et éclatons le facteur d'actualisation sur n périodes.

$$\frac{S}{(1+R)^{n/i}} \cdot \sum_{i=wc}^n \binom{n}{i} \cdot (p \cdot u)^i \cdot (q \cdot d)^{n-i}$$

Qui devient en utilisant  $(p^*, q^*)$  :

$$S \cdot \sum_{i=wc}^n \binom{n}{i} \cdot (p^*)^i \cdot (q^*)^{n-i}$$

Formule identique à l'option COR, obtenue en changeant les probabilités, K en S et en supprimant le facteur d'actualisation.

**Conclusion** : la probabilité  $(p^*, q^*)$ , permet de valoriser les options digitales TOR, de la même manière que les options COR, bien que les options TOR dépendent de la valeur terminale.

Un changement dans la mesure, permet d'éviter le calcul d'une somme qui dépend de la variable S.

$$\text{COR Call} = \frac{K}{(1+R)^T} \cdot \sum_{i=wc}^n \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{(n-i)}$$

$$\text{TOR Call} = S \cdot \sum_{i=wc}^n \binom{n}{i} \cdot p^{*i} \cdot q^{*(n-i)}$$

## 5-Modèle d'option et probabilités risque - neutre.

Le changement de numéraire consiste dans notre exemple à prendre l'actif risqué comme référence monétaire.

Dans le cas du modèle binomial précédent, les probabilités RN associées à l'actif risqué sont:

$$p^* = \frac{p \cdot u}{1+R} = \frac{u - d \cdot \frac{u}{1+R}}{(u-d)} \quad (5.1)$$

$$q^* = \frac{q \cdot d}{1+R} = \frac{u \cdot d / (1+R) - d}{(u-d)}$$

Généralisons la **théorie de l'arbitrage** à deux actifs risqués S et X, sans actif sans risque.

Normalisons la matrice de marché M, en prenant un prix présent égal à l'unité. Cela revient à diviser les prix futurs par le prix présent. Cela ne modifie pas la généralité du calcul.

Notons M la matrice de marché ::

$$M = \begin{pmatrix} u1 & u2 \\ d2 & d2 \end{pmatrix}$$

L'actif 1, augmente de S à S.u1 et baisse de S à S.d1.

L'actif 2, augmente de X à X.u2 et baisse de X à X.d2.

Soit  $\Delta$ , le déterminant de  $M = u1 \cdot d2 - u2 \cdot d1$

L'inversion de la matrice M, permet d'obtenir les composantes des portefeuilles AD :

$$X = (d2 - d1) / \Delta$$

$$Y = (u1 - u2) / \Delta$$

$$X + Y = (u1 + d2 - u2 - d1) / \Delta = 1 / (1+R)$$

Et les probabilités RN en posant :

$$D' = (u1 + d2 - u2 - d1)$$

$$p = (d2 - d1) / D'$$

$$q = (u1 - u2) / D'$$

avec :  $q + p = 1$

Les probabilités associées aux sous-jacents se calculent comme précédemment : nous obtenons deux couples de probabilités : ( $p1^*$ ,  $q1^*$ ) et ( $p2^*$ ,  $q2^*$ ).

$$p1^* = \frac{u1.p}{1+R} = \frac{u1d2 - u1d1}{(1+R).D'} \quad (5.2)$$

$$q1^* = \frac{d1.q}{1+R} = \frac{d1u1 - d1u2}{(1+R).D'}$$

On vérifie que  $p1^*+q1^*=1$ .

$$p2^* = \frac{u2.p}{1+R} = \frac{u2d2 - u2d1}{(1+R).D'} \quad (5.3)$$

$$q2^* = \frac{d2.q}{1+R} = \frac{d2u1 - d2u2}{(1+R).D'}$$

Et  $p2^*+q2^*=1$

Les probabilités RN ( $p,q$ ), valorisent les options COR. Les probabilités RN ( $p1^*,q1^*$ ) et ( $p2^*,q2^*$ ), valorisent les options TOR, dans les cas où le paiement implique l'un des deux actifs risqués.

Remarque : ce modèle ne permet pas de valoriser tel quel les options d'échange de pay-off  $(X>S).(1)$  ou  $(X>S).(X-S)$ , car il faut alors introduire le facteur de corrélation  $\rho$  entre  $S$  et  $X$ .

## 6-Modèle binomial CRR.

Que devient le modèle binomial dans le cas où nous ajoutons la relation complémentaire du modèle CRR (formule 3.3), qui impose  $u=1/d$ . Par exemple, les formules précédentes (5.3) et (5.2) se simplifient et donnent un seul couple de probabilités au lieu de deux :

$$p^* = \frac{u1/u2 - 1}{(1+R).D'} \quad (6.1)$$

$$q^* = \frac{1 - u2/u1}{(1+R).D'}$$

Prenons un exemple :

Soit, la matrice de marché obtenue avec les 2 actifs suivants avec une période de 2 années :  $T=2$ .

Actif 1 :  $\sigma=10\%$        $u = 1,1519$   $d = 0,8681$

Actif 2 :  $\sigma=5\%$        $u=1,0733$   $d = 9317$

Nous pouvons utiliser 2 matrices différentes :

$$M1 = \begin{pmatrix} 1.1519 & 1.9733 \\ 0.8681 & 0.9317 \end{pmatrix}$$

et

$$M2 = \begin{pmatrix} 1.1519 & 0.9317 \\ 0.8681 & 1.9733 \end{pmatrix}$$

La matrice  $M1$  possède 2 désavantages :

- son TSR est négatif,  $R = -0,4977\%$
- Son déterminant est faible ( $\Delta=0,1415$ ), comparé à celui de  $M2$  ( $\Delta=0,4376$ ).

Plus le déterminant est élevé, plus la zone de validité du prix présent est importante.

En retenant  $M2$ , on obtient :

$1+R = 1.0050$  et  $R = 0,4977\%$

$p = 0.4823$        $q = 0.5177$

$p^* = 0.5528$        $q^* = 0.4472$

## 7-Conclusion.

Nous avons déjà remarqué, que le pur modèle d'arbitrage limite de façon importante la zone de validité du prix présent, par rapport à une matrice de marché définissant les prix futurs.

En ajoutant le modèle CRR, qui relie les deux facteurs  $u$  et  $d$ , par la relation  $u.d=1$ , nous limitons encore plus nos choix dans le cadre d'un marché à deux actifs risqués. Il devient nécessaire alors d'introduire une liberté supplémentaire en ajoutant une corrélation entre ces deux actifs.

-/-