FINKEYS FRANCE

IGR M2 TRESORERIE – GESTION DU CHANGE

Le Programme

Le marché des changes et la négociation - PHH

Les instruments financiers de change

La gestion d'une position de change

Le risque de change

Détermination de la position de change:

Instruments de couverture du risque de change

Comptabilisation du change

Valorisation du change - normes comptables IFRS

Les Instruments Financiers de Change

FINKEYS FRANCE

PHILIPPE HELAINE – PHILIPPE DUCHEMIN

Les instruments financiers de change

- Le change au comptant - PHH
- Le change à terme
- Le swap de change
- L’option de change
- L’option digitale

- Le currency swap

- Les options exotiques et produits structurés

Change à Terme

Contrat financier de change à terme

- Arbitrage : comptant décalé dans le temps
- Cours à terme : le prix
- Paramètres: cours à terme et maturité
- Report déport : positif ou négatif
- Structure à terme des cours

Contrat et Position

- Change au comptant = position = Fifo
  - sans maturité
- Change à terme = contrat financier
  - avec maturité

Change à Terme - Arbitrage

L’opération de change à terme est la synthèse d'une opération de change au comptant, d’une opération de placement et d’une opération d’emprunt.

Le cours à terme se calcule par arbitrage entre le cours comptant, le taux de dépôt et le taux d'emprunt des devises concernées.

Définition du report et du déport:

Cours à terme = Cours comptant + report

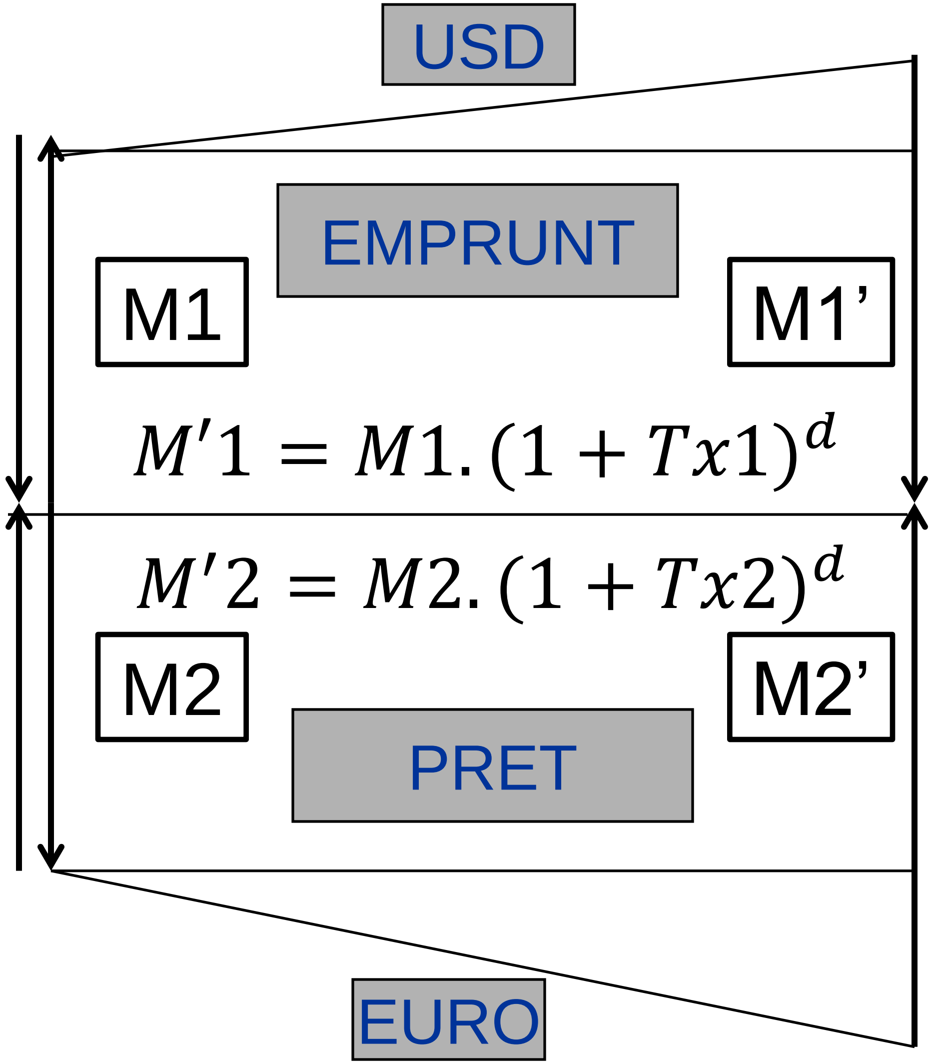
Cours à terme = Cours comptant – déport

Le Change à Terme Synthétique

Vente au Comptant

vend -M
achat E

$$S = \frac{M1}{M2}$$



Achat à Terme

achat M'
vente -E'

$$F = \frac{M'1}{M'2}$$

Formules du Change à Terme

Formule du cours à terme F:

$$S = \frac{M1}{M2}$$

$$M'1 = M1.(1 + Tx1)^d$$

$$M'2 = M2.(1 + Tx2)^d$$

$$F = \frac{M'1}{M'2}$$

$$F = \frac{M'1}{M'2} = \frac{M1.(1 + tx1)^d}{M2.(1 + tx2)^d} = S.\frac{(1 + tx1)^d}{(1 + tx2)^d}$$

$$F_{1/2} = S_{1/2}.\frac{DF2}{DF1}$$

Formules du Change à Terme

Formule de Valorisation du CAT: valeur actuelle des flux futurs:

$$MtM = \frac{M1'}{(1+Tx1)^d}.S - \frac{M2'}{(1+Tx2)^d}$$

$$MtM = M1.DF1.S - M2.DF2$$

Le Swap de Change

FINKEYS FRANCE

Le Swap de Change

Le swap de change est la combinaison d’une opération de change au comptant et d’une opération de change à terme de sens opposée.

Ces deux opérations s’effectuent en même temps, avec le même tiers.

Le montant en devise, est identique au comptant et à terme. Cela entraine un risque de change résiduel. Pourquoi?

Le swap de change « actuariel »: le montant au comptant est égal à la valeur actualisée du montant à terme.

Ce swap ne possède aucun risque de change.

Le Swap de Change

Définition du contrat de swap de change:

- le nominal en devise
- la date de maturité (date du contrat à terme)
- le prix est défini par 2 éléments:

  Le cours spot et le cours à terme

  ou bien, le cours spot et le point de swap

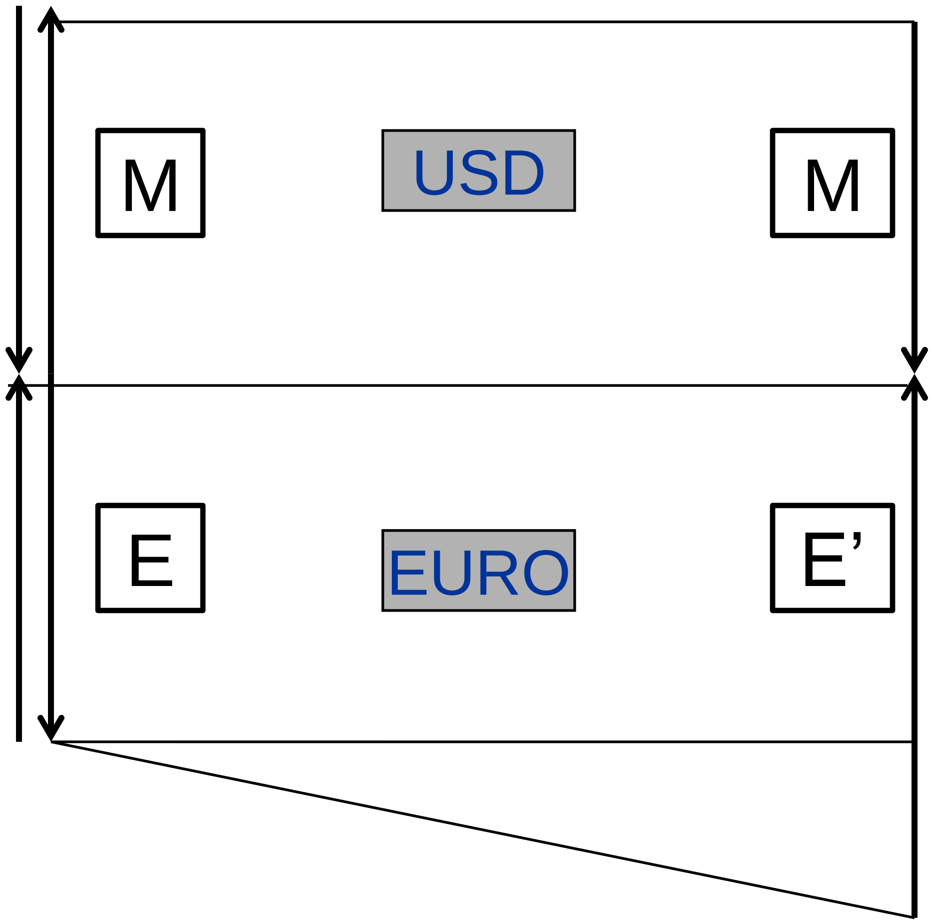
Définition du point de swap: différence entre le cours à terme et le cours au comptant pour la maturité en question.

Autres noms: swaps cambiste – contrat de point de swap

Le Swap de Change Classique

Vente au Comptant

vend -M
achat E



Achat à Terme

achat M
vente -E’

Le Swap de Change

Le swap de change est avant tout un instrument de gestion de taux.

Le swap de change sert à faire du roll over de trésorerie

Formule de valorisation du swap de change

Pourquoi cet instrument est-il aussi intitulé contrat de point de swap?

Quel est l’exposition au change de ce contrat?

Comment pouvons nous couvrir ce risque de change?

Le Swap de Change

Interprétation au sens Prêt/Emprunt.

Le montant en devise est échangé au comptant et à terme, cela représente une opération de prêt ou d'emprunt selon le sens.

Cette opération se réplique en devise de référence, avec le paiement en plus du point de swap, appliqué au nominal.

Le contrat de swap de change est bien un produit de trésorerie.

Un usage traditionnel de ce contrat est de proroger le contrat par un contrat identique au précédent, la devise de référence capitalisant l'intérêt (ici le point de swap)

L’option de Change

FINKEYS FRANCE

Option de change

- Prix d’exercice et maturité Call put
- Parité Symétries Delta
- Interprétation de la formule de GK

Options digitales

Options barrières

Quantos et Combos

Dichotomies :

- change au comptant et change à terme
- swaps de change et swap de devise : produits de taux
- change à terme et option de change : produits de change
- achat et vente de devises et prets et emprunts en devises

Option Financière: définition

Définition de l'option financière

Une option est un contrat financier bilatéral, entre un acheteur et un vendeur, qui donne le droit à l'acheteur d'acheter ou de vendre un actif nommé le sous-jacent à un prix prédéterminé (le prix d'exercice), durant une période fixe.

L'acheteur de l'option n'a pas l'obligation d'exercer son droit.

Le vendeur de l'option est quant à lui obligé d'honorer son engagement quand l'acheteur exerce son option.

Contrairement aux contrats à terme, l'option est un contrat asymétrique, qui requiert de la part de l'acheteur, le versement d'une prime au vendeur.

La prime rapportée au nominal de l'option est le prix de l'option, défini en devise de la prime par unité du nominal.

Comme tout contrat financier, l'option possède:

- un nominal, exprimé en unités de sous-jacent
- une durée, ou une date de maturtié

Définitions Call Put

Une option d'achat (Call) donne à son détenteur le droit d'acheter un actif à une date (ou période) donnée et à un prix prédéterminé.

Une option de vente (Put) donne à son détenteur le droit de vendre un actif à une date (ou période) donnée et à un prix prédéterminé.

Il ne faut pas confondre la notion d'achat/vente associée à l'option, qui détermine le décisionnaire et le payeur de la prime

avec

la notion d'achat/vente du sous-jacent.

1 - Commenter: un Call USD/EUR est identique à un Put EUR/USD

2 – Que signifie la stratégie: acheter un Call et vendre un Put sur le même sous-jacent avec le même prix d'exercice et la même maturité.

Type d’option

Type d’option: Européenne, Américaine ou Bermudéenne

L’option est Européenne si elle ne peut être exercée qu’à la date de maturité.

L’option est Américaine si elle peut être exercée à tout instant jusqu’à la date de maturité.

L’option est Bermudéenne, sil elle peut être exercée à des dates précisée d’avance dans le contrat.

La valeur intrinsèque de l’option, est égale au gain positif immédiat en cas d’exercice immédiat de l’option.

La valeur temps de l’option est égale à la différence entre le prix de l’option et sa valeur intrinsèque.

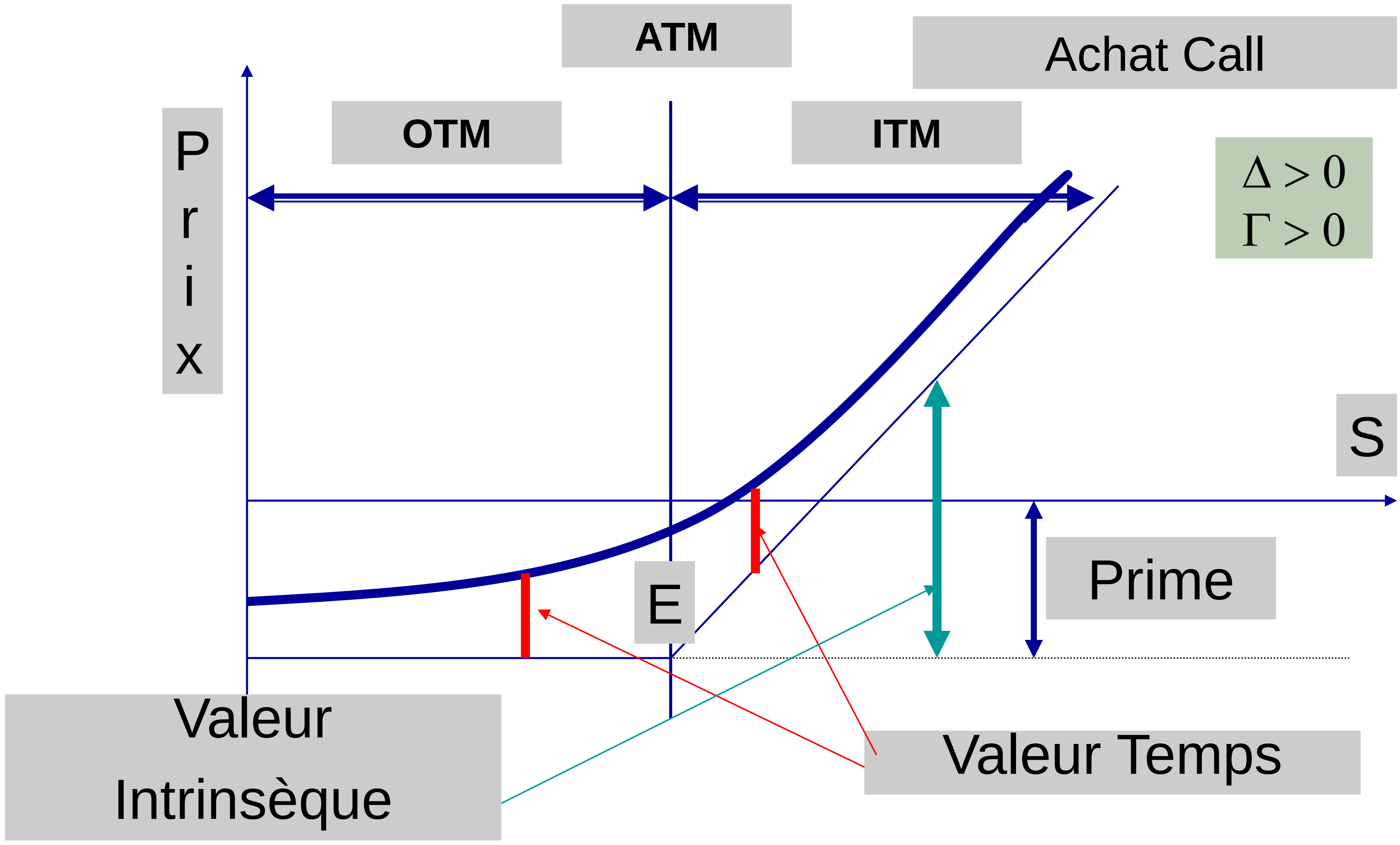
Option: ITM ATM OTM

Une Option est dite:

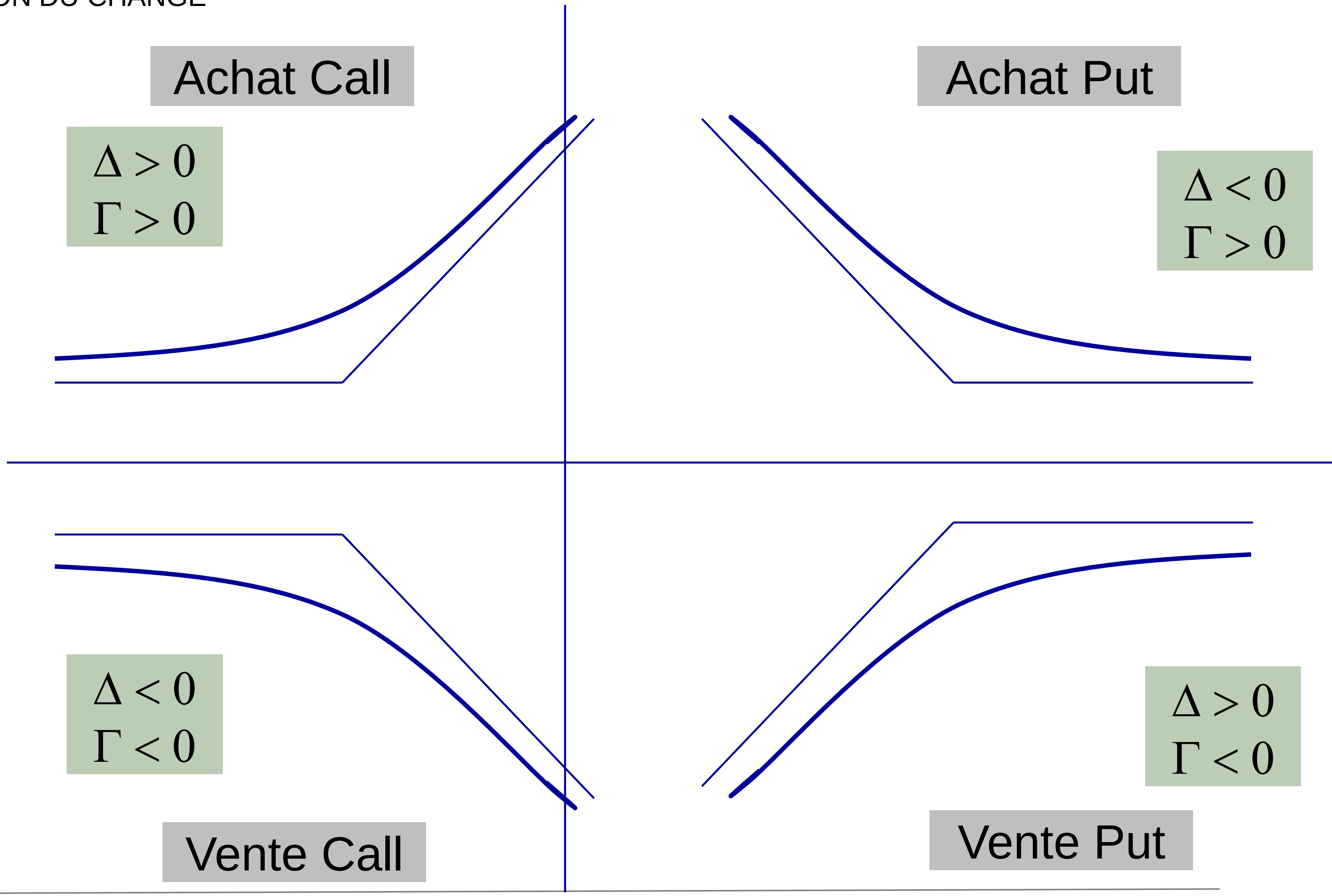
- dans la monnaie (ITM – in the money), quand la valeur intrinséque est positive (non nulle).
- en dehors de la monnaie (OTM – out of the money), quand la valeur intrinsèque est nulle.
- à la monnaie (ATM – at the money) , quand le prix d'exercice E est égal au prix du sous-jacent S

	Dans la monnaie	**A la monnaie**	**En dehors de la monnaie**
Call	S>E	S=E	S<E
Put	S<E	S=E	S>E

Option: profil de risque



Le Delta des Options



Formule de Garman Kolhagen

- S : cours du sous jacent et E : prix d'exercice
- σ : volatilité et T: durée restante à courir
- R_d taux d'intérêt de la devise locale (domestique)
- R_f taux d'intérêt de la devise étrangère (foreign)
- N: loi normale standard cumulée

$$\text{Prime} = \frac{M.N(d1)}{(1+r_f t)^T} S - \frac{(M.E).N(d2)}{(1+r_d t)^T}$$

$$d1 = \frac{Ln(S/E) - (r_f - r_d)t + \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d2 = \frac{Ln(S/E) - (r_f - r_d)t - \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$\text{d1} - \text{d2} = \sigma\sqrt{t}$$

Parité Put / Call

Soit le portefeuille suivants:

Achat d'un call de strike K

Vente d'un put de strike K

Prêt et emprunt des primes.

Les prix d'exercice K et les échéances du call et du put sont identiques

A l'échéance, quelque soit la position du sous-jacent, le sous-jacent sera échangé. En conclusion:l

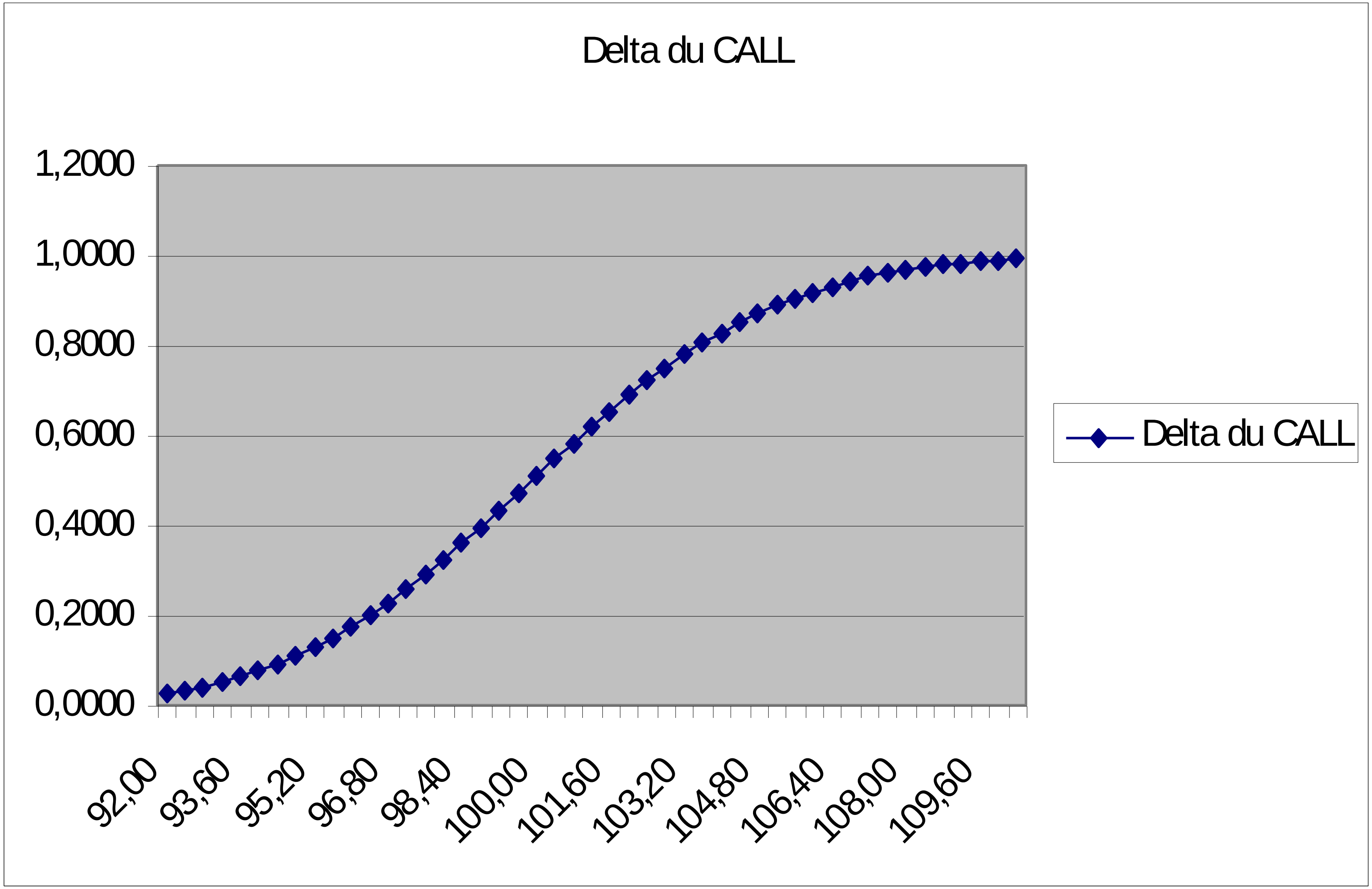
$$\boxed{\begin{array}{c} C + VA(K) = P + S \\ C - P = S - DF_t \times K \end{array}}$$

Les « greeks »

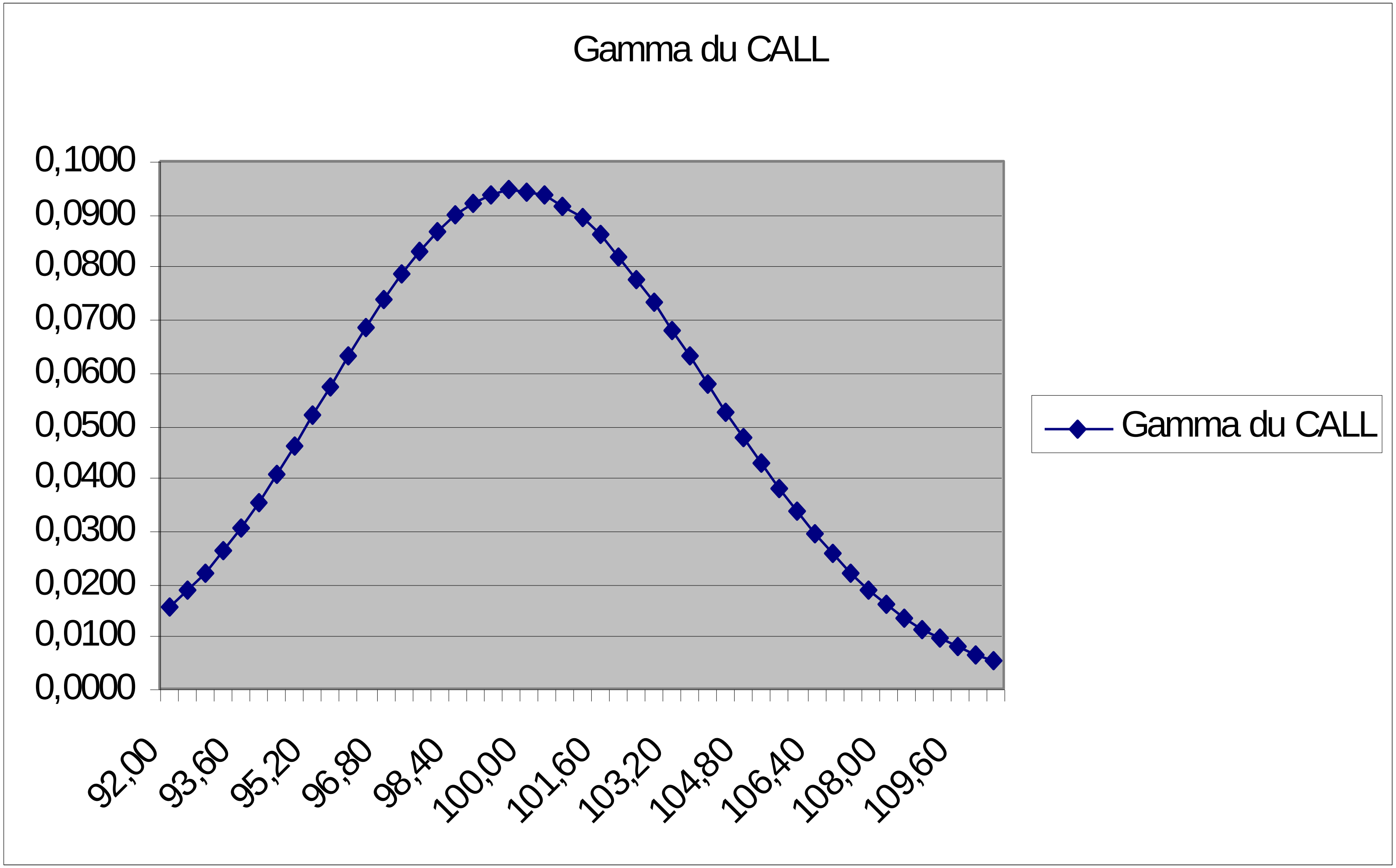
On peut calculer les sensibilités des options à différents paramètres, ce sont mathématiquement les dérivés de la fonction d'évaluation par rapport aux paramètres:

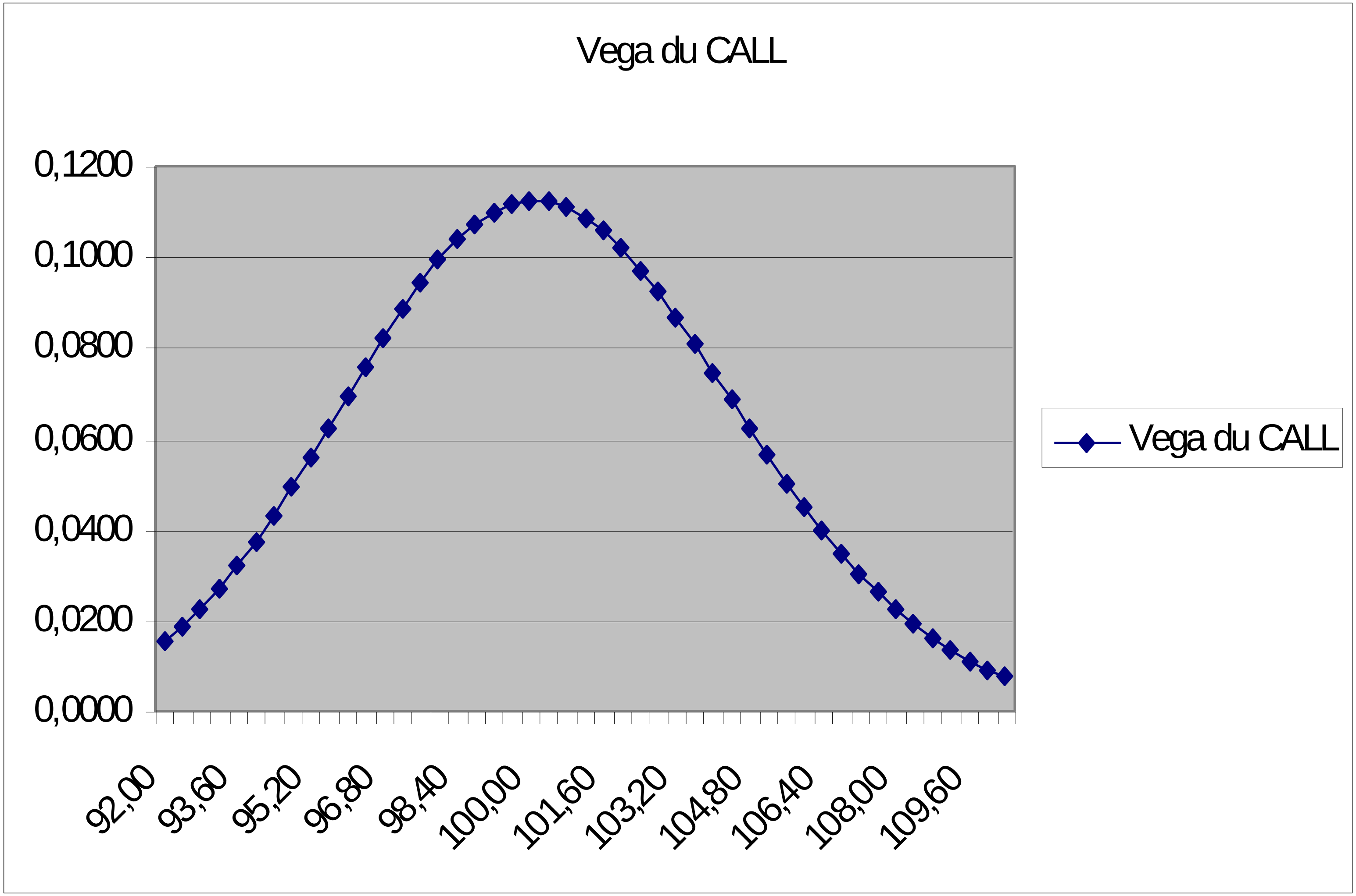
- Spot : delta et gamma
- Terme : delta forward et gamma forward
- Volatilité : vega (ou kappa)
- Temps : thêta
- Taux : rhô

GESTION DU CHANGE

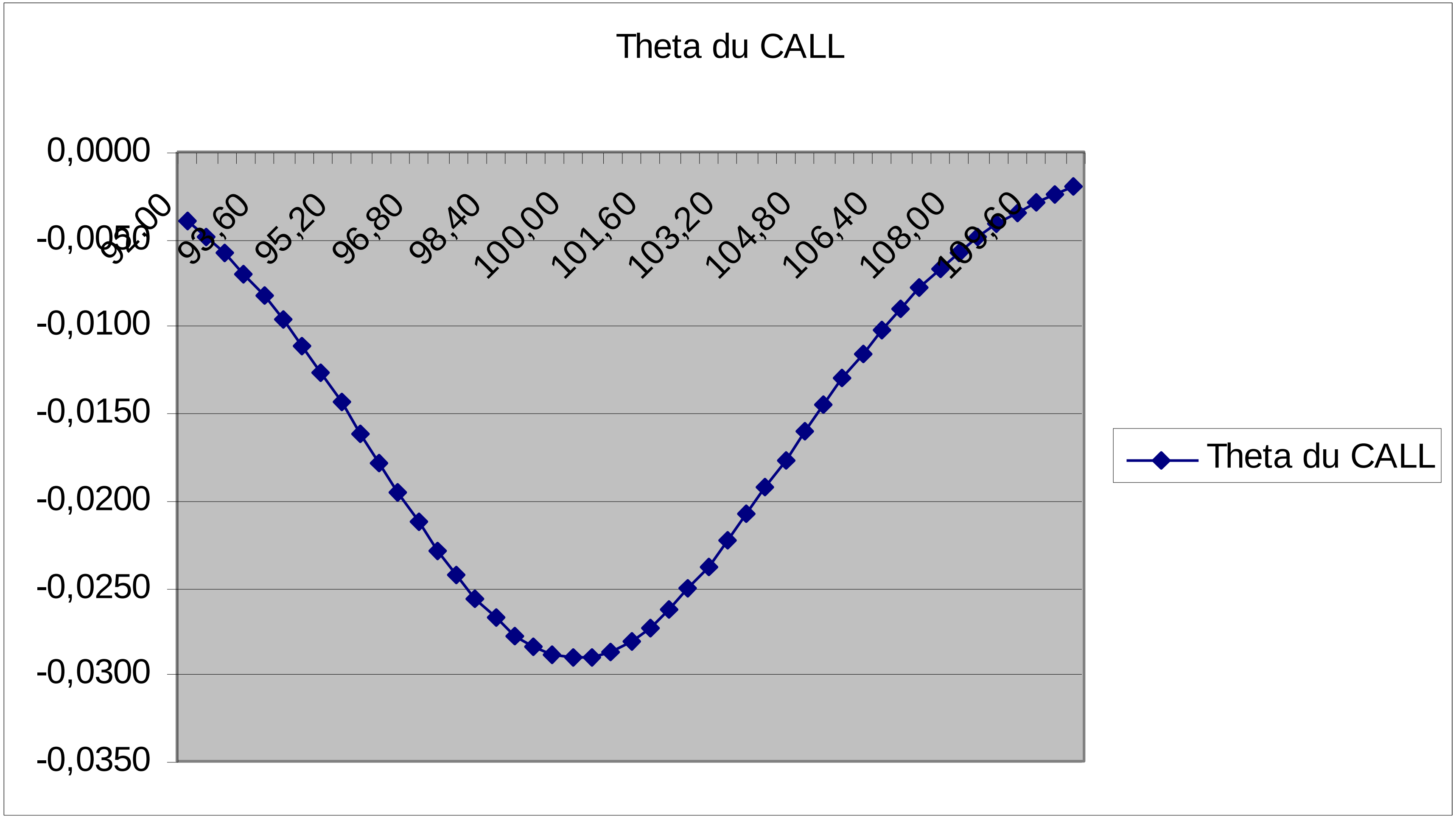


Γ GAMMA


Gamma du CALL
0,1000
0,0900
0,0800
0,0700
0,0600
0,0500
0,0400
0,0300
0,0200
0,0100
0,0000
92,00
93,60
95,20
96,80
98,40
100,00
101,60
103,20
104,80
106,40
108,00
109,60
Gamma du CALL


Vega du CALL
0,1200
0,1000
0,0800
0,0600
0,0400
0,0200
0,0000
92,00
93,60
95,20
96,80
98,40
100,00
101,60
103,20
104,80
106,40
108,00
109,60
Vega du CALL

θ THETA



Theta du CALL
0,0000
-0,0050
-0,0100
-0,0150
-0,0200
-0,0250
-0,0300
-0,0350
92,00
93,60
95,20
96,80
98,40
100,00
101,60
103,20
104,80
106,40
108,00
109,60
Theta du CALL

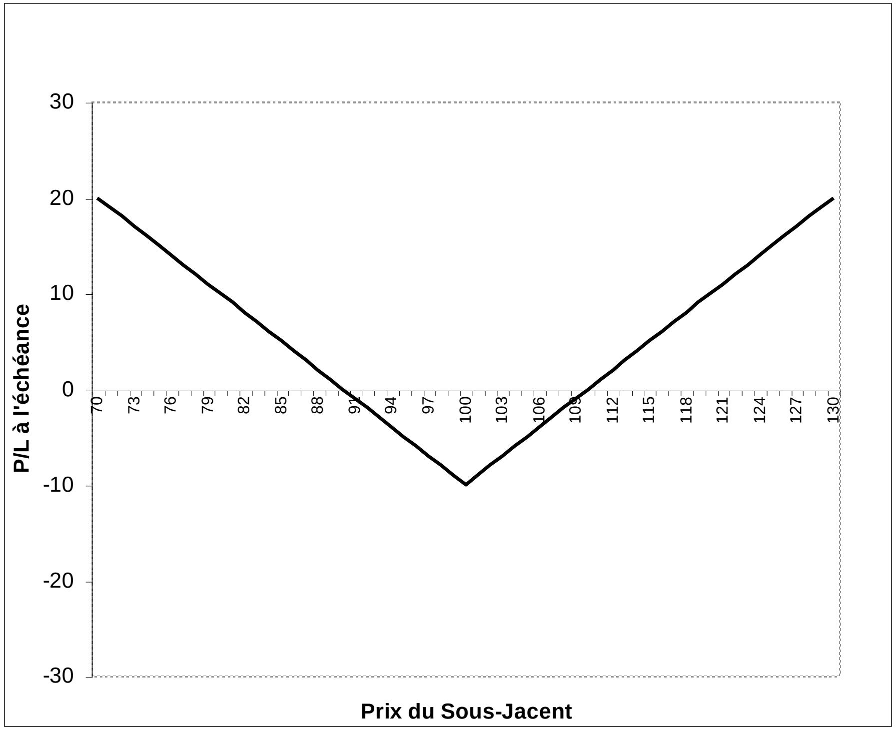
Les « greeks »

	Achat Call	Vente Call	Achat Put	Vente Put
Delta	+	-	-	+
Gamma	+	-	+	-
Vega	+	-	+	-
Thêta	-	+	-	+

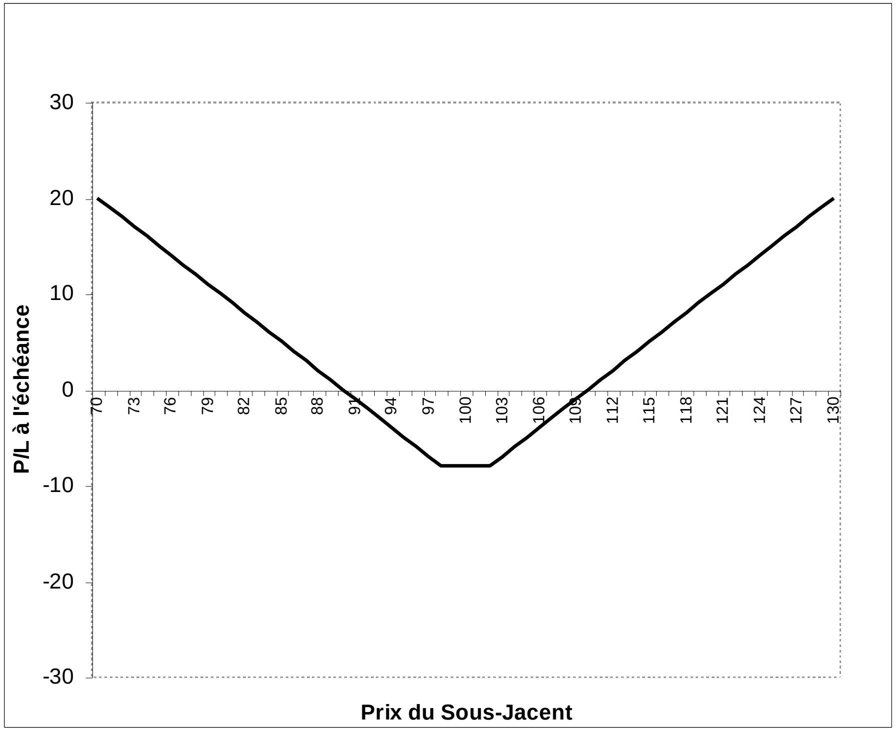
Stratégies

GESTION DU CHANGE

Straddle



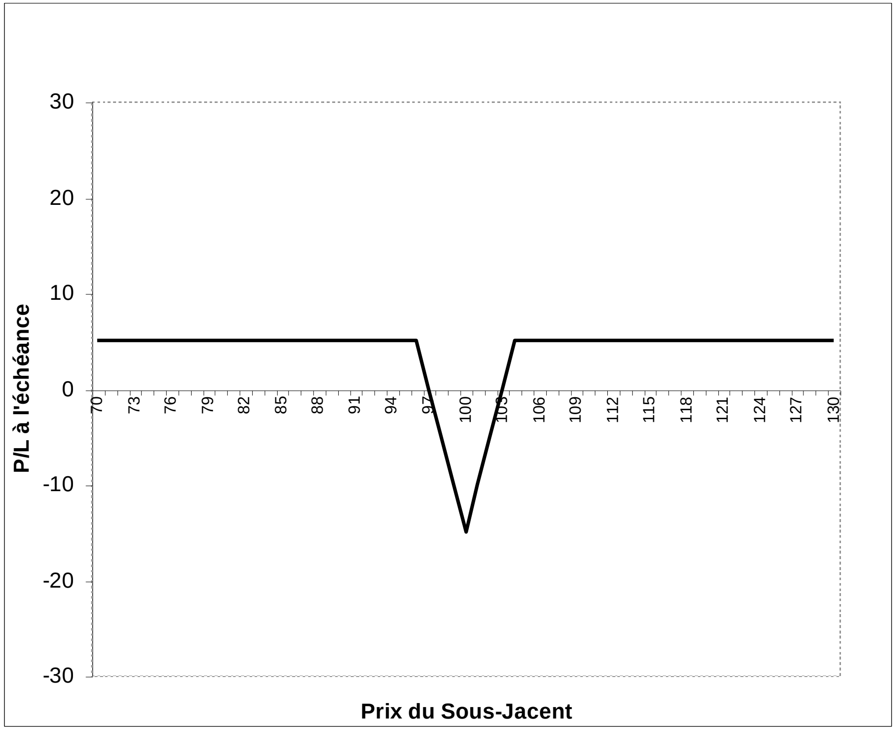
Strangle



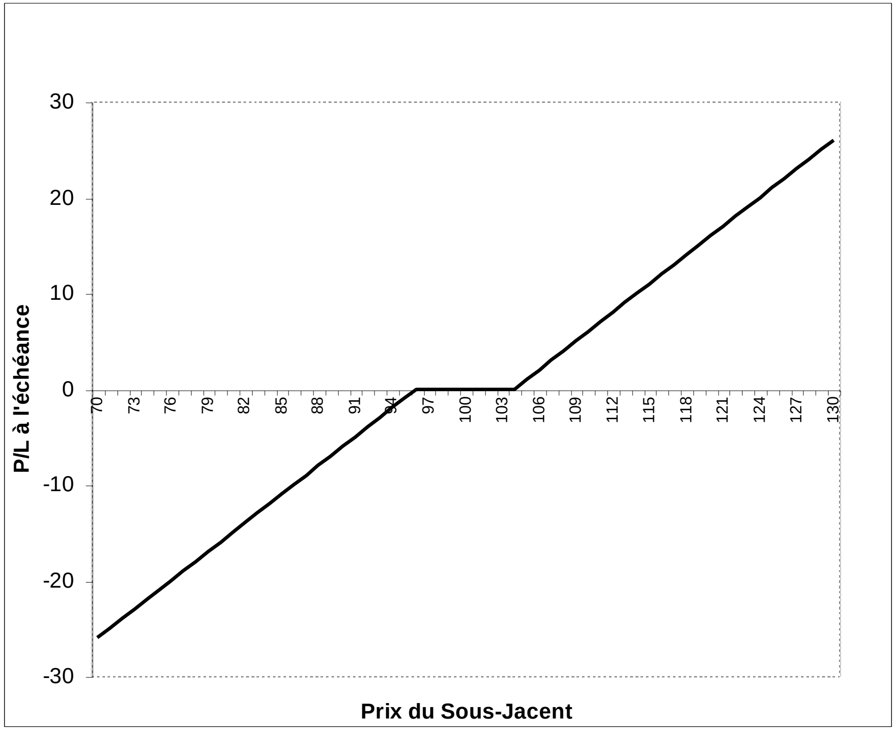
Stratégies

GESTION DU CHANGE

Butterfly



Tunnel



Formule Comptant

$$MtM = Musd \times CoursFx - Meur$$

Formule Terme

$$MtM = \frac{Musd}{(1 + taux.usd \times \frac{durée}{base})} \times CoursFx - \frac{Meur}{(1 + taux.eur \times \frac{durée}{base})}$$

Formule Option (Black Sholes Merton)

$$MtM = \frac{Musd \times N(d1)}{(1 + taux.usd \times \frac{durée}{base})} \times CoursFx - \frac{Meur \times N(d2)}{(1 + taux.eur \times \frac{durée}{base})}$$

Comptabilité - Engagement

- Change au Comptant:
  - Bilan sur les 2 devises
  - Contrepartie: trésorerie
  - Achat = actif / vente = passif
  - Comptes en devises
  - Rapport des devises, égal au cours au comptant
  - Mise à jour d'une position de change
- Change à Terme
  - Hors Bilan
  - Rapport des devises, égal au cours à terme
  - Alternatives: décomposition par arbitrage
  - Pas de position de change sauf si décomposition

Comptabilité - Résultat

Change au Comptant:

- Calculer une contrevaleur en devise de référence

Change à Terme

- Récupérer 3 (ou 5) données de marché
  - Un cours de change et 2 taux d'intérêt
- Calculer le cours à terme de marché
- Calculer la valorisation Mark To Market

Décomposition du MtM

- impact de change
- Impact de taux

Le Risque de Change

PHILIPPE HELAINE – PHILIPPE DUCHEMIN

Typologie du risque de change

Risque de change

Economique	Commercial
Translation	Filiales
Transaction	Financier

Risque de taux, de crédit, opérationnel

Capitaux Réglementaires à la SGCIB

GESTION DU CHANGE

	Crédit	Marché	Opérationnel	Total
Réseau France	77.4	0	3.3	80.7
Réseau Intern.	65.6	0.4	3.2	69.2
Fin. Spé. et Assur.	38	0	2.3	40.3
Bq Privé. Gestion	12.8	.9	3.1	16.8
BFI	65.2	12	30.2	107.4
Gestion Propre	4.2	0.6	5	9.7
TOTAL	263.1	13.9	47.1	324.1

Identification du Risque de Change

Détermination du risque de change :

Croisement entre une position de change et une variation des cours

Donc sur une durée avec la possibilité que la position se modifie

Détermination de la mesure du risque de marché = variation des cours

- Variation nécessairement sur une période
- Variations = écart type historique
- VAR et ES, intervalle de confiance

Identification du Risque de Change

1 - Achat d'actif en devise le plus souvent fongible – prix de revient (fifo) – avec résultat latent sur différence

Ventes avec prix avec prix, avec trading

Consommation avec prix, achat de commodities

Amortissements avec prix, achat de machine afin de rentrer dans le prix de revient

Position modérée avec instrument à terme et options

2 - Risque de Bilan, de consolidation

Sur situation nette / valeur en cas de revente

Sur dividendes

Sur Ebidta

Identification du Risque de Change

3 - Cash (pas d'asset) receivable en devise spot et terme – sans prix de revient : doit aller en résultat sur total

Ventes définitive pour arriver à un réaliser

Ou matching avec une vente à terme antérieure à prix fixe

Ou matching avec une position isolée antérieure à prix fixe

4 - Interprétation comptable

Enregistrement au bilan des positions 1

Identification des positions de change 1 à réévaluer

Identification dans des comptes de position de change 2 à recevoir à réévaluer

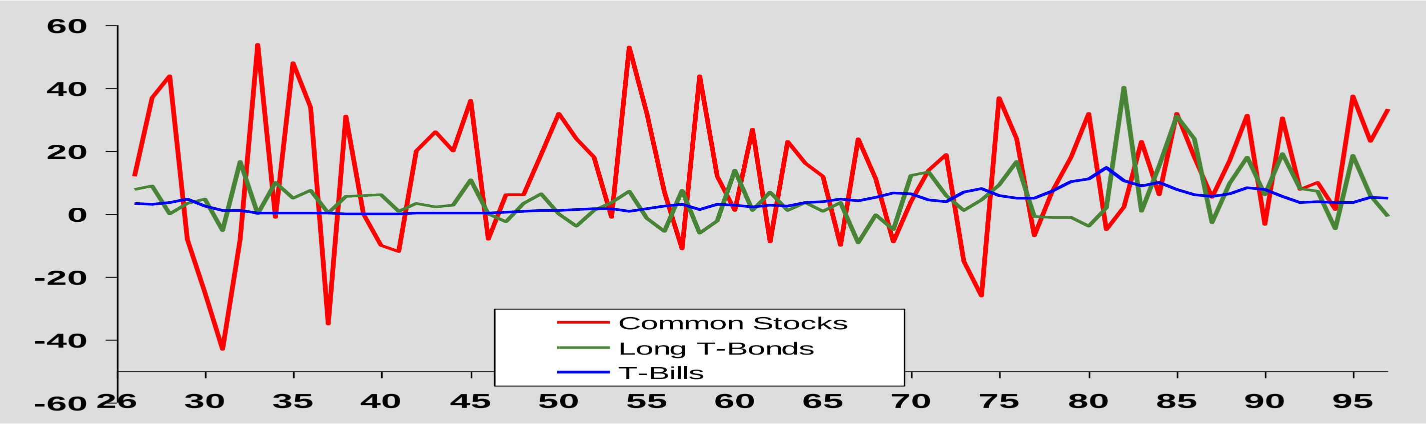
Enregistrement au hors-bilan des positions

Définition Financière:

- Incertitude dans le temps (sur le futur) d'une variable aléatoire
- Sous jacent quantifiable et mesurable en temps réel
- Impact financier

Définition Générale

Incertitude liée au manque d'information maintenant et dans le futur.



Mathématiques

Le langage des risques est celui des mathématiques, à travers la modélisation du hasard:

- La Statistiques : étude des données
- Les Probabilités : étude des phénomènes aléatoires

Le hasard: on appelle **expérience aléatoire** une expérience E qui, reproduite dans des conditions identiques, peut conduire à plusieurs résultats possibles, et dont on ne peut prévoir le résultat par avance.

Les techniques modernes font appel à la théorie des ensembles, à l'analyse, en particulier à la théorie de la mesure de Lebesgue, à l'axiomatisation des probabilités dues à Kolmogorov.

La finance utilise le calcul stochastique.

Les facteurs de risque permettent de quantifier le risque sur un nombre réduit de facteurs: la courbe de taux est discrétisée en quelques points: 1j, 1wk, 1-3-6-mo, 1y…

Ces facteurs ne sont définis qu'à partir du moment où il est possible de les mesurer

Les facteurs de risque sont aussi les axes sur lesquels vont se projeter les positions

- Ex: un change à terme dépend de 3 variables: un cours de change, et deux taux d'intérêt à terme.
  - on utilisera donc 5 facteurs de risque car les taux d'intérêt doivent être interpolés.
- Ex: marché obligataire: choix possible
  - chaque maturité de la courbe de taux
  - le parallel ehift, la rotation, la déformation (voir ACP)

Equation du Risque

Le Risque est égal à une Perte Potentielle sur une Position par rapport à des Variations Standards des Facteurs de Risque

Risques = (Position) x (Variations)

Méthode

Un calcul de risque repose sur l'utilisation de données historiques et des calculs statistiques :

- Moyenne supposée nulle
- Variance et Écart Type
- Corrélation

Modèle de Résultat

Pour chaque facteur de risque:

Equation du Résultat

Résultat = fonction(Position) ; Variation du Facteur de Risque)

Différence de résultat:

$$\Delta \text{résultat} = \text{Position}.[\delta.\Delta \text{RF} + \gamma.\frac{(\Delta \text{RF})^2}{2}]$$

Equation du Risque

Risque = Perte Potentielle

Risque = f(Position;Variation STANDARD du Facteur de Risque)

Risque forfaitaire: Variation Standard = 2%

Risque Var: Variation Standard liée à l'écart type

Les rendements se calculent sur une période: entre date i et date j

Définition du Rendement Jour:

$$R_{[i-j]} = \frac{P_j - P_i + D_{[i-j]}}{P_i}$$

Avec:

P_i Prix du jour i.

D: revenu (dividende), versé durant la période.

$R_{[i-j]}$ est un rendement en %, donc sans unité.

Distinction: Rendement Arithmétique (R_A) et Rendement Géométrique (R_G)

$$R_A = \frac{P_j - P_i}{P_i} \approx \frac{(P_j + D_{[i-j]}) - P_i}{P_i}$$

$$R_G = Ln\frac{P_j}{P_i} \approx Ln\frac{(P_j + D_{[i-j]})}{P_i}$$

Rendement Multi Période

Combinaison des Rentabilités multi périodes:

Rendements Arithmétiques: (1+ rentabilité multi-périodes) ^{T}est égal à la moyenne géométrique des (1+rentabilités mono-période)

$$\boxed{1+R_{A[1..T]}=\sqrt[T]{\prod_{k=1}^{T-1}\left[1+\left(\frac{P_{k+1}-P_k}{P_K}\right)\right]}=\sqrt[T]{\left(\frac{P_T}{P1}\right)}}$$

Rendements Géométriques: la rentabilité multi-périodes est égal à la somme arithmétique des rentabilités mono-période

$$\boxed{R_{G[1..T]}=\sum_{k=1}^{k=T-1}\ln\left(\frac{P_{k+1}}{P_k}\right)=\ln\left(\frac{P_T}{P_1}\right)}$$

Le Risque se calcule sur des Séries Historiques en POURCENTAGE

Ce Pourcentage est une égal à une Variation RELATIVE du Facteur de Risque entre deux dates.

L'horizon du risque correspond à la durée pendant laquelle le risque est calculé, en général 1 JOUR OUVRE pour du Risque de Marché.

Le Risque n’a pas d’unité (comme les pourcentages)

Horizon 1 jour: entre (j-1) et j

$$\boxed{\frac{\Delta \mathrm{Prix}}{\mathrm{Prix}} = \frac{\mathrm{Prix}(j) - \mathrm{Prix}(i)}{\mathrm{Prix}(i)} \approx Ln \frac{\mathrm{Prix}(j)}{\mathrm{Prix}(i)}}$$

Volatilité et Corrélation

LA VOLATILITE

- La mesure du risque sur un facteur de risque est mesurable par son écart type
- La volatilité est le nom financier de l’Écart Type mathématique
- Plus la Volatilité est élevée, plus le risque est élevé
- Contrairement aux rendements, la volatilité n’est pas additive, ce qui rend sont calcul plus difficile, mais sous-additive
- La volatilité possède une structure à terme

LA CORRELATION

- La Corrélation est un indicateur statistique calculé entre deux Facteurs de Risque
- Une corrélation est toujours comprise entre -1 et 1
- La corrélation est symétrique entre deux facteurs
- La corrélation permet de diminuer le risque grâce à la diversification.

La Volatilité du Change 2015 2017

		contre EUR	Contre USD	Cours	Cours
1	USD	0,5892%	0,5892%	1,1993	0,8338
2	GBP	0,6190%	0,6734%	0,8872	0,7398
3	CHF	0,6565%	0,7876%	1,1702	0,9757
4	JPY	0,6506%	0,6191%	135,0100	112,5740
5	DKK	0,0199%	0,5870%	7,4449	6,2077
6	SEK	0,3693%	0,6342%	9,8438	8,2080
7	NOK	0,5299%	0,7334%	9,8403	8,2050
8	AUD	0,6661%	0,6673%	1,5346	1,2796
9	CAD	0,6152%	0,5668%	1,5039	1,2540
10	NZD	0,7013%	0,7326%	1,6850	1,4050
11	SGD	0,4634%	0,3769%	1,6024	1,3361
12	THB	0,5476%	0,2791%	39,1210	32,6199

Corrélations sur le Change/EUR 2015 2017

	USD	GBP	CHF	JPY	DKK
USD	1,0000	0,3795	0,2040	0,5049	0,1277
GBP	0,3795	1,0000	0,1238	0,0259	0,0180
CHF	0,2040	0,1238	1,0000	0,2484	0,0906
JPY	0,5049	0,0259	0,2484	1,0000	0,0295
DKK	0,1277	0,0180	0,0906	0,0295	1,0000

Données sur 2013 à 2015

Etude de cas

Enoncé du problème + Feuille de réponse disponibles sur:

- http://www.finkeys.com
- dans menu gauche de la page d'accueil « Cas Master Cergy »

- documents word: questions + réponses
- entrainement au calcul matriciel sous Excel
- outils/tools: 3 programmes:

Mcholesky: matrice de Cholesky

Mvalp: valeurs propres

Mvecp: vecteurs propres

Calcul de la VAR sur un portefeuille de 5 devises, défini pour chaque élève

Calcul de Var sur une Position de Change

Calculer le Risque sur la position suivante :

USD	5 500 000
GBP	-4 500 000
CHF	2 800 000
DKK	45 000000
SGD	-8 500 000

1 Calculer le Risque selon la méthode forfaitaire en utilisant un taux uniforme de 2%

2 Calculer le Risque en tenant compte de la volatilité de chaque devise par rapport à la Devise de Référence

3 Calculer le Risque en tenant compte de la volatilité et en supposant toutes les corrélations nulles.

4 Calculer le Risque en tenant compte de la matrice de Variance/Covariance donnée

Prendre les données issues du Site Internet de la Banque Centrale Européenne :

- Statistiques/Exchange Rate
- http://www.ecb.int/stats/exchange/eurofxref/html/index.en.html
- Série sur les 3 dernières années complètes: 2015 à 2017
- Séries contre Euro, cotation « incertaine »

Transformer les points en virgule :

Faire reconnaître les dates (format AMJ)

Trier les dates de la plus ancienne à la plus récente

La matrice de Variance/Covariance (VCV) et la matrice de Corrélations (CORR), se calcule avec un simple produit matriciel:

$$VCV = \frac{{}^{T}(RDT - MOY)(RDT - MOY)}{N} \qquad CORR = \frac{{}^{T}\left(\frac{RDT - MOY}{ECT}\right)\left(\frac{RDT - MOY}{ECT}\right)}{N}$$

Avec

RDT: matrice des rendements

MOY: vecteur des moyennes des rendements

ECT: vecteur écart-types des rendements

N: nombre d'observations (de rendements)

Formule Excel pour le calcul d'une matrice de Covariance

VCV=PRODUITMAT(TRANSPOSE(RDT-MOY); (RDT-MOY))/LIGNES(RDT)

Formule Excel pour le calcul d'une matrice de Corrélation

CORR=PRODUITMAT(TRANSPOSE((RDT-MOY)/ECT);(RDT-MOY)/ECT))/LIGNES(RDT):

LA VALUE AT RISK

FINKEYS FRANCE

Définition de la Var

Définition de la Var

La Var est un modèle statistique, c'est un test

- Perte Potentielle sur une position risquée (en euro)
- Deux paramètres importants: l'horizon et l'intervalle de confiance

Horizon: durée pendant laquelle le risque court, en général un jour sur les risques de marché, 10 jours pour la réglementation et 1 an sur le risque de crédit

Intervalle de confiance: représente la probabilité d'occurrence d'un événement, ici ce sera une perte, à 99% ou 95%

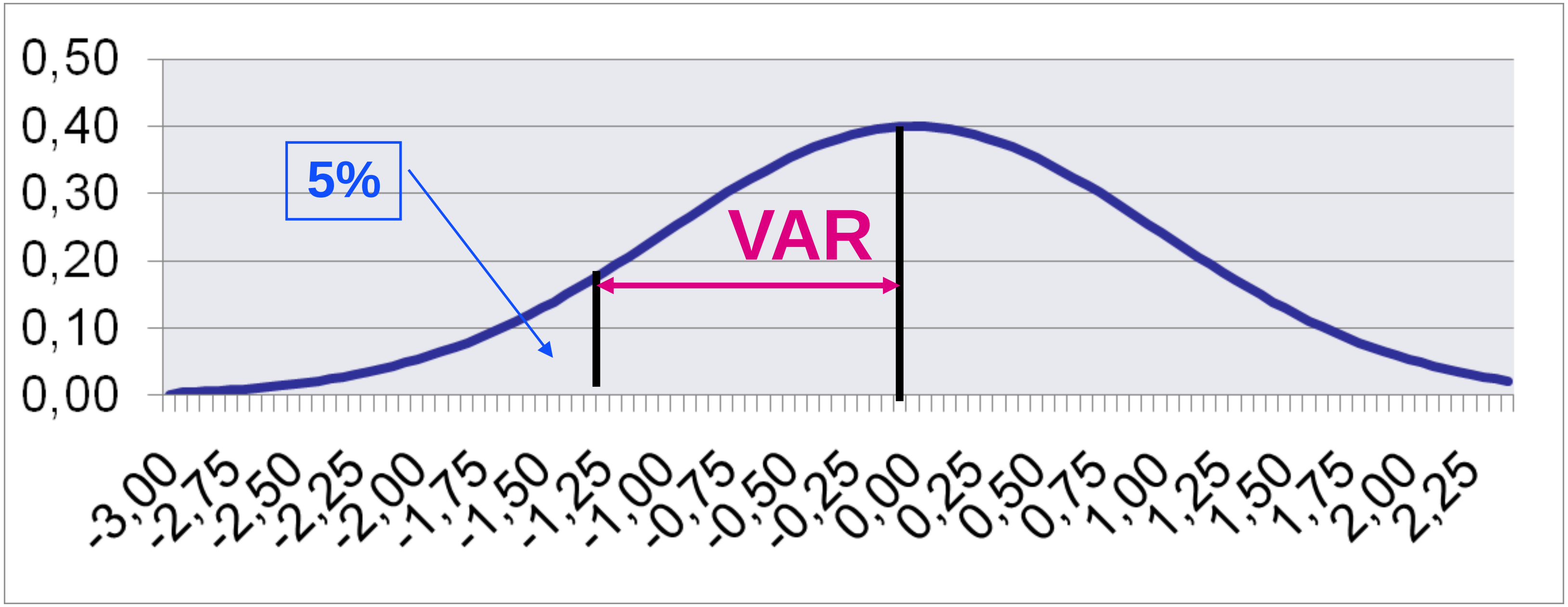
Un intervalle de confiance de 99%, va nous permettre de calculer une perte qui a lieu une fois sur 100, c'est-à-dire environ deux fois par an.

Définition de la VAR - centile

Le vecteur résultat obtenu représente une distribution historique du résultat quotidien.

De ce résultat nous pourrions prendre le pire scénario comme indicateur de risque: min (résultat)

La Var définie avec un intervalle de confiance de 5%, sera le **centile** (négatif) à 5%:



ES – Expected Shortfall

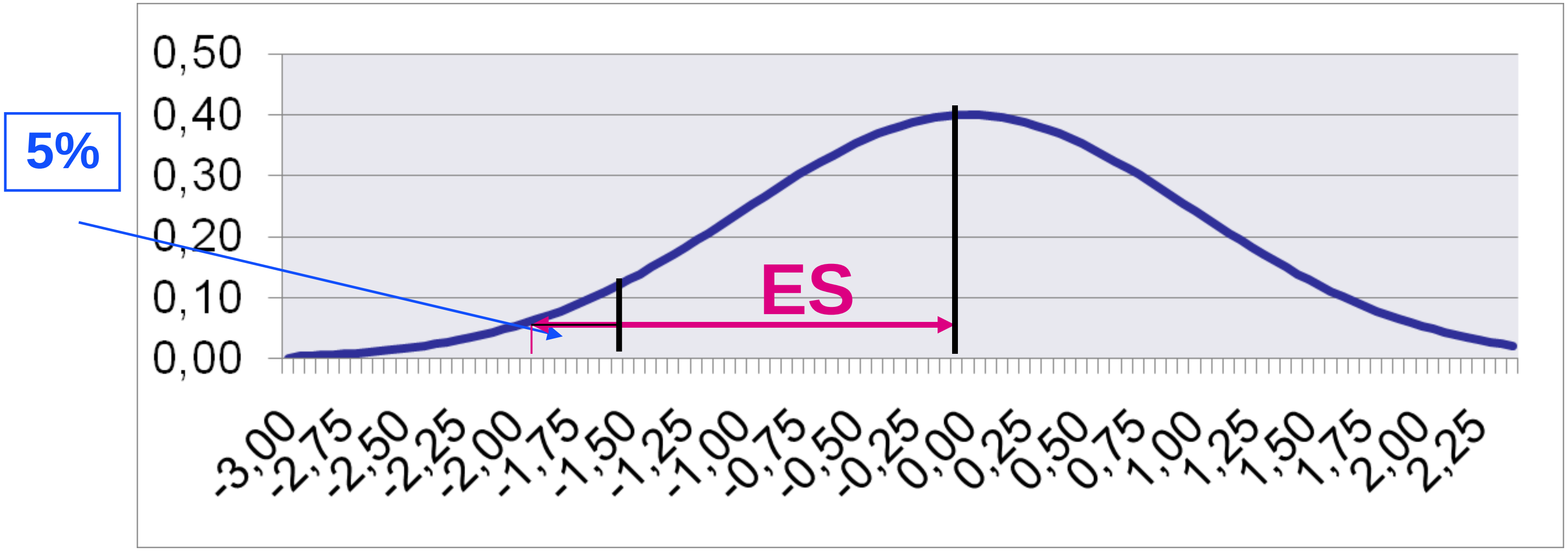
<u>ES: Expected Shortfall</u>

C'est la moyenne des pertes au delà de la VAR (précédente)

Indicateur de risque plus « robuste » que la VAR : « coherent measure »

En historique: faire la moyenne des pertes excédants la VAR

En paramétrique: remplacer alpha par: ϕ(alpha)/0,05 (avec ϕ: loi normale std)



Les Méthodes de calcul de la Var

VAR HISTORIQUE

Utilisation des données de marché passées (historique) pour calculer une distribution réelle des résultats. Utilisation de centiles pour déterminer une perte potentielle.

VAR PARAMETRIQUE

Utilisation d'une modélisation de type loi normale pour les facteurs de risque. Utilisation de la matrice de variance covariance.

VAR MONTE CARLO

Utilisation de données historiques pour calculer les paramètres d'une loi de distribution des facteurs de risque. Simulation de millions de chemins possibles et calcule d'une distribution des résultats. Utilisation de centiles pour déterminer une perte potentielle.

LA VAR HISTORIQUE

FINKEYS FRANCE

La VAR Historique

Définition

- La VAR Historique consiste à simuler les résultats sur une position à partir de données de marché historiques

- Le calcul du résultat s'effectue en appliquant un choc quotidien (horizon jour), à la position risquée:

  - le choc quotidien sera défini en pourcentage, nous prendrons le rendement quotidien entre 2 jours ouvrés consécutifs
  - la position sera convertie en devise de référence (EUR) avec le dernier cours connu

Résultat Jour = Position (euro) x Choc (%)

La Fonction Centile

PL	PL Trié
-2374,34	10911,89
9993,57	9993,57
3811,36	5699,37
-7692,84	5022,98
10911,89	4789,13
-4786,24	3811,36
-3906,23	2854,90
4789,13	-2374,34
5022,98	-3906,23
5699,37	-4786,24
2854,90	-7692,84

VAR = Centile à 5%

Fonctions Excel:

CENTILE (Matrice ligne, pct)

Si pct=0% -> mini
Si pct=100% ->maxi

Centile	PL	
0	-7692,84	Mini
0,1	-4786,24	Var 90%
0,5	3811,36	Mediane
0,6	2854.90	
1	10911,89	Maxi

VAR Historique

Propriété de la VAR Historique

- Ne suppose pas que la distribution est normale
- Calcul direct sur le vecteur de résultat
- Simplicité théorique du modèle et facile à contrôler
- Limité par le nombre d’observations

Avantages

- Facile à mettre en œuvre
- Intuitif dans la présentation
- Facile dans le contrôle

LA VAR PARAMÉTRIQUE

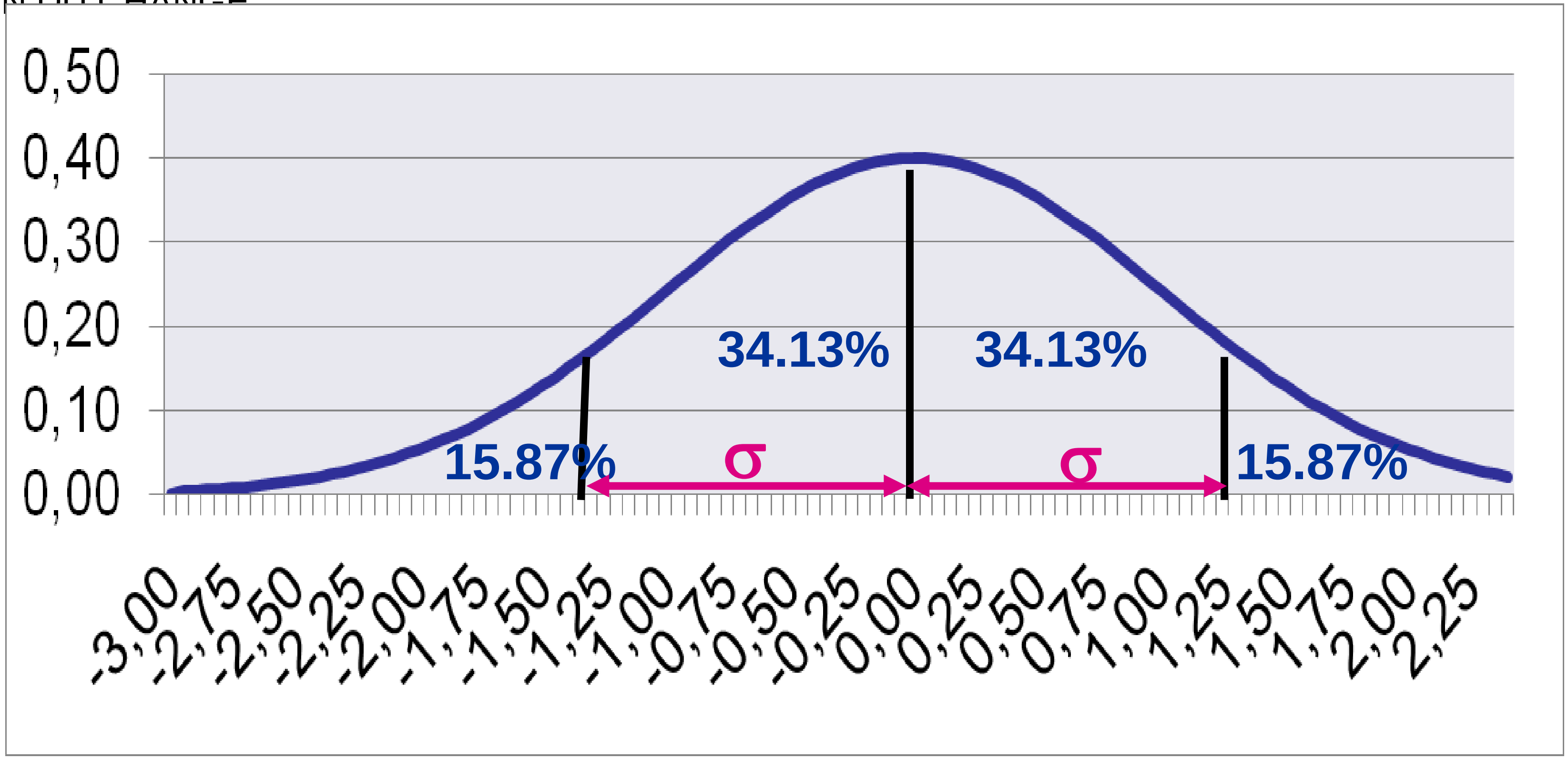
FINKEYS FRANCE

VAR Paramétrique

Propriétés de la VAR Paramétrique

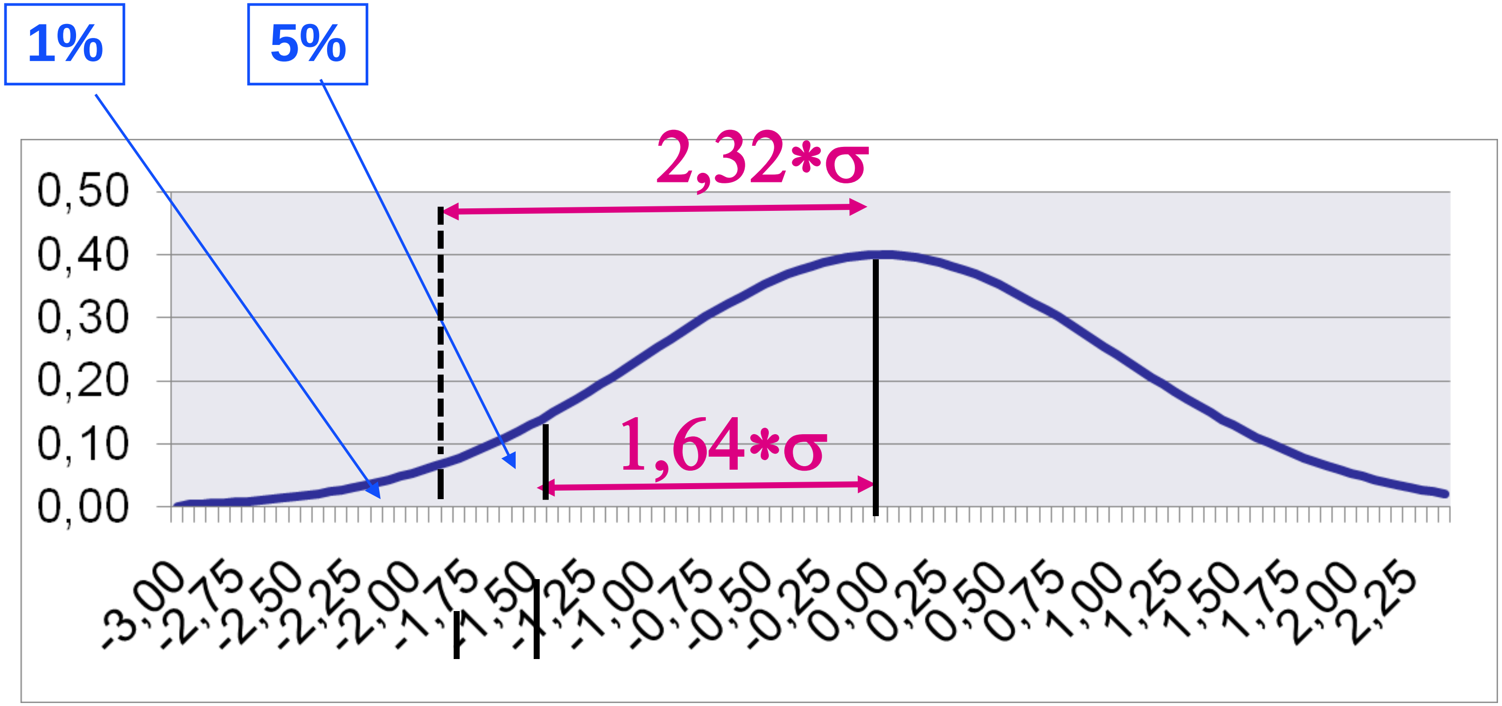
- La VAR paramétrique suppose une distribution « normale » des résultats.
- La VAR est symétrique par rapport à la position, qu'on soit long ou court, la VAR est identique.
- La VAR augmente avec l'intervalle de confiance: les pertes importantes sont plus rares
- Les statistiques s'appuient sur des données historiques.

Courbe de Gauss



La Surface de la courbe entre 2 écart-types est égale à 68.26%
On cherche le nombre d'écart type permettant d'atteindre 5%
LOI.NORMALE.STANDARD(-1) = 0,158655

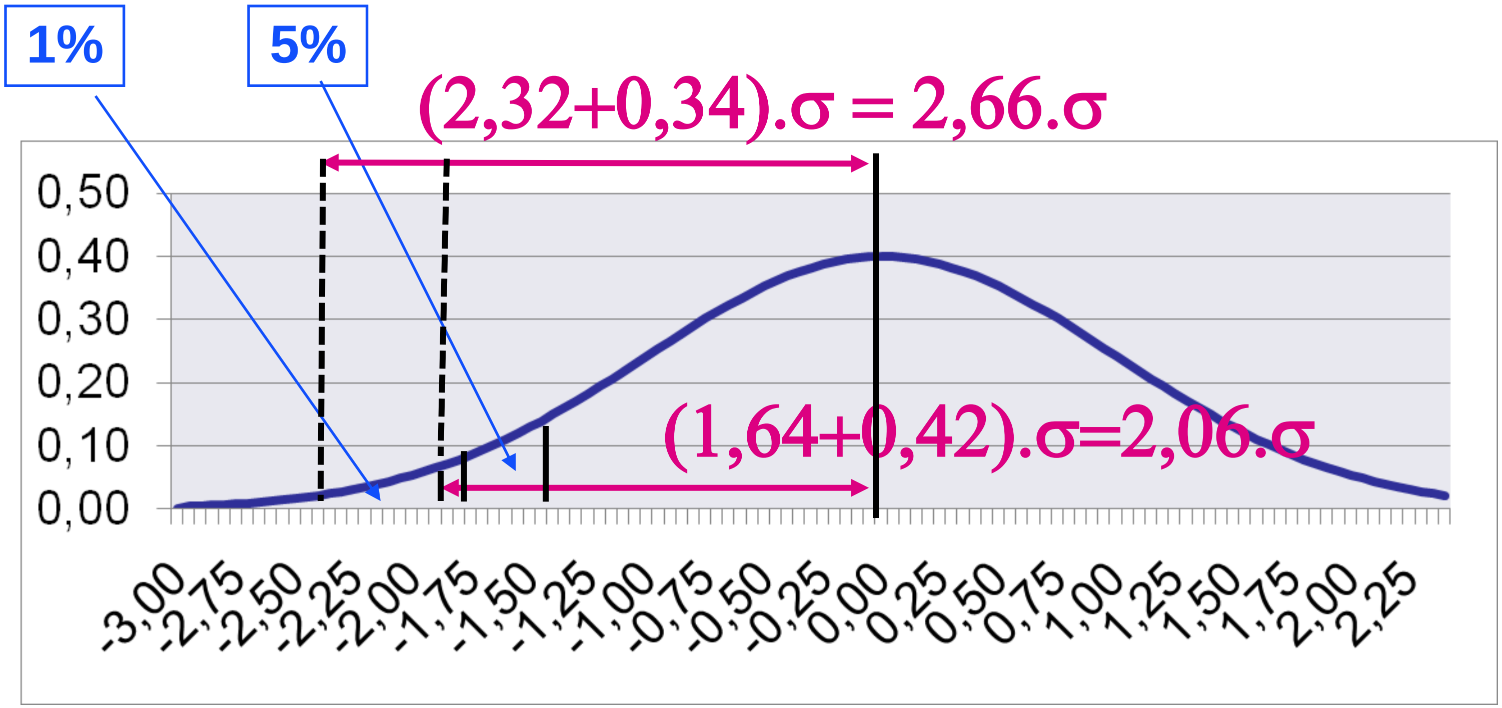
Facteur Multiplicatif – Coefficient Alpha



Solution:

alpha95 = LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(0,95) = 1,644853

alpha99 = LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(0,99) = 2,326347



Solution:

beta95 = LOI.NORMALE(alpha95;0;1;FAUX)/0,05 = 2,062713

beta99 = LOI.NORMALE(alpha99;0;1;FAUX)/0,01 = 2,665214

VAR avec un seul facteur de risque

Pour calculer une VAR sur un seul facteur, il faut

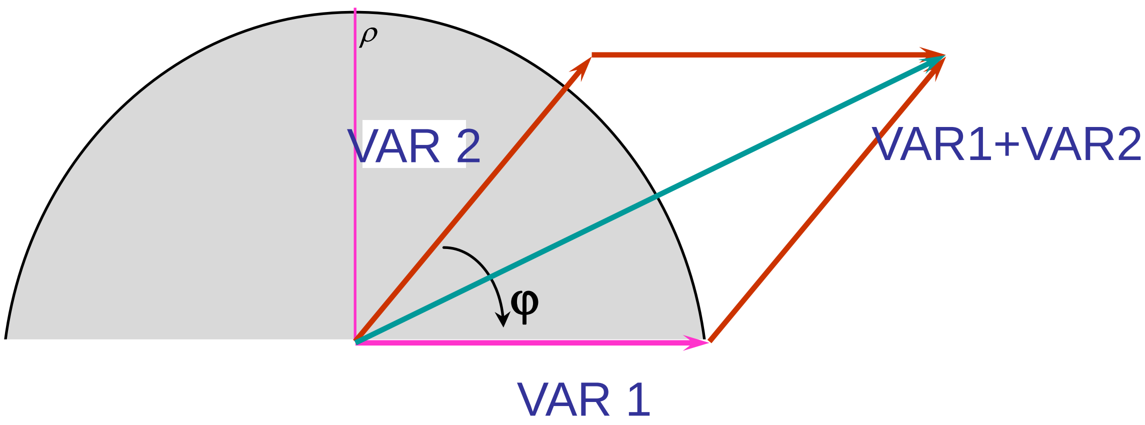
- La Position sur le facteur de risque
- Une formule de calcul du résultat : PL = Position x ΔPrix
- La statistique sur le facteur de risque: variance ou écart-type calculés sur les données historiques
- L'intervalle de confiance permet de qualifier la « rareté » de l'événement, dans le cas d'une loi normale, le coefficient à prendre en compte est alpha=1.6448

VAR(95%) = (POSITION x COURS FX) x (1,6448. σ %)

Additivité des Facteurs

SOMME DE 2 VAR
Corrélation: ρ
cos φ = ρ

$$\text{VAR} = \sqrt{\text{VAR1}^2 + \text{VAR2}^2 + 2\rho\,\text{VAR1.VAR2}}$$



Règle du parallélogramme

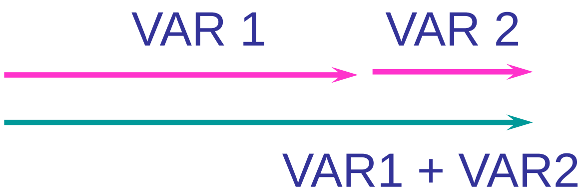
Addition Vectorielle

$$VAR1 + VAR2 = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x1 + x2 \\ y1 + y2 \end{pmatrix}$$

VAR avec Deux Facteurs –Corrélation 1 ou -1

Corrélation: $\rho = +1$

$$VAR = \sqrt{VAR1^2 + VAR2^2 + 2VAR1.VAR2}$$



$$VAR = VAR1 + VAR2$$

Corrélation: $\rho = -1$

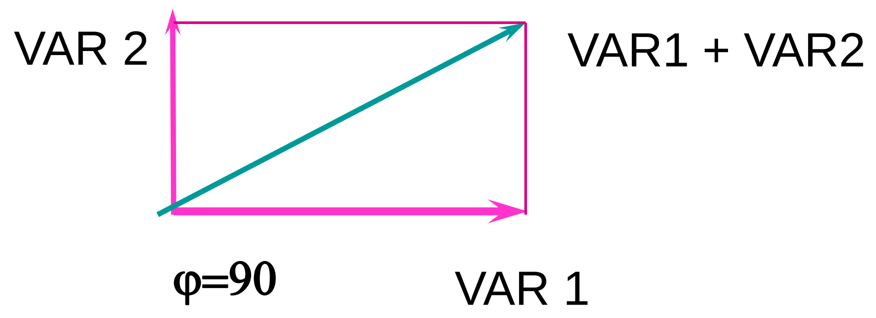
$$VAR = \sqrt{VAR1^2 + VAR2^2 - 2VAR1.VAR2}$$

$$VAR = \left| VAR1 - VAR2 \right|$$

Somme avec Corrélation Nulle

Corrélation : $\rho = 0$

$$VAR = \sqrt{VAR_1^2 + VAR_2^2}$$



Présentation matricielle avec 2 facteurs:

$$VAR = \sqrt{VAR1^2 + VAR2^2 + 2\rho VAR1.VAR2}$$

$$VAR = \sqrt{\alpha^2 \sigma_1{}^2 P_1{}^2 + \alpha^2 \sigma_2{}^2 P_2{}^2 + 2\rho(\alpha\sigma_1 P_1)(\alpha\sigma_2 P_2)}$$

$$VAR = \alpha\sqrt{\begin{pmatrix} P_1 & P_2 \end{pmatrix} . \begin{bmatrix} \sigma_1{}^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2{}^2 \end{bmatrix} . \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}} \qquad VAR = \sqrt{\begin{pmatrix} VAR_1 & VAR_2 \end{pmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} . \begin{pmatrix} VAR_1 \\ VAR_2 \end{pmatrix}}$$

Présentation matricielle avec n facteurs:

$$VAR = \alpha\sqrt{{}^{T}P.(VCV).P} \qquad VAR = \sqrt{{}^{T}V.(CORR).V}$$

Corrélation Nulle

$$\mathrm{VAR} = \sqrt{{}^{\mathrm{T}}(\mathrm{V}).\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.(\mathrm{V})} = \sqrt{{}^{\mathrm{T}}(\mathrm{V}).(\mathrm{V})}$$

$$= \alpha \sqrt{(\sigma_1 \mathrm{P}_1 \quad \sigma_2 \mathrm{P}_2 \quad ..... \quad \sigma_n \mathrm{P}_n).\begin{pmatrix} \sigma_1 \mathrm{P}_1 \\ \sigma_2 \mathrm{P}_2 \\ ...... \\ \sigma_n \mathrm{P}_n \end{pmatrix}}$$

$$\mathrm{VAR} = \sqrt{\sigma_1{}^2 \mathrm{P}_1{}^2 + \sigma_2{}^2 \mathrm{P}_2{}^2 + ... + \sigma_n{}^2 \mathrm{P}_n{}^2} = \sqrt{\mathrm{VAR}_1{}^2 + \mathrm{VAR}_2{}^2 + ... + \mathrm{VAR}_n{}^2}$$

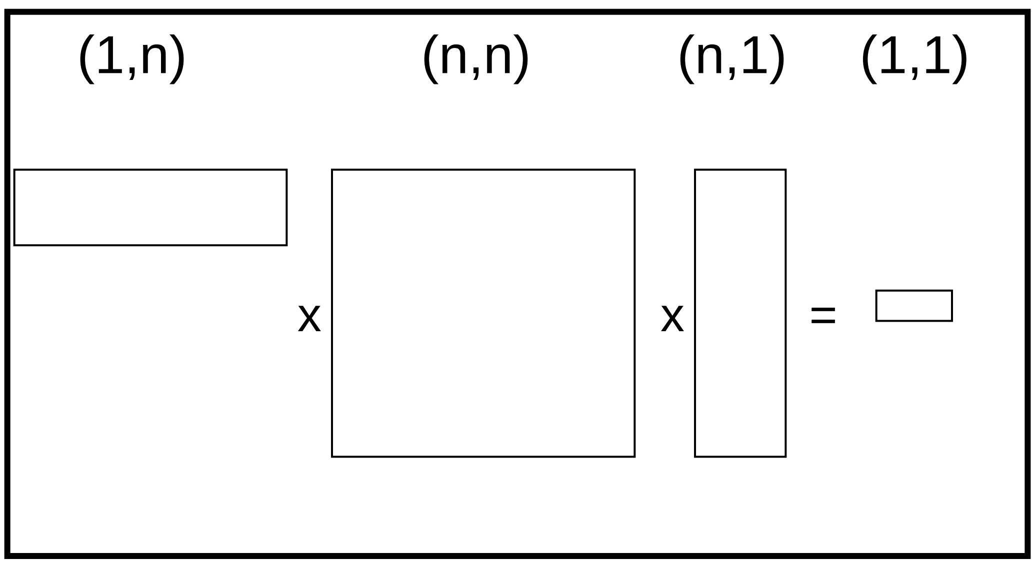
$$\mathrm{VAR}^2 = \mathrm{VAR}_1{}^2 + \mathrm{VAR}_2{}^2 + ... + \mathrm{VAR}_n{}^2$$

GESTION DU CHANGE

Utilisation des formules Excel sur les matrices:

VAR=ALPHA*RACINE(PRODUITMAT(TRANSPOSE(P);PRODUITMAT(V;P)))

VAR=RACINE(PRODUITMAT(TRANSPOSE(W);PRODUITMAT(C;W)))



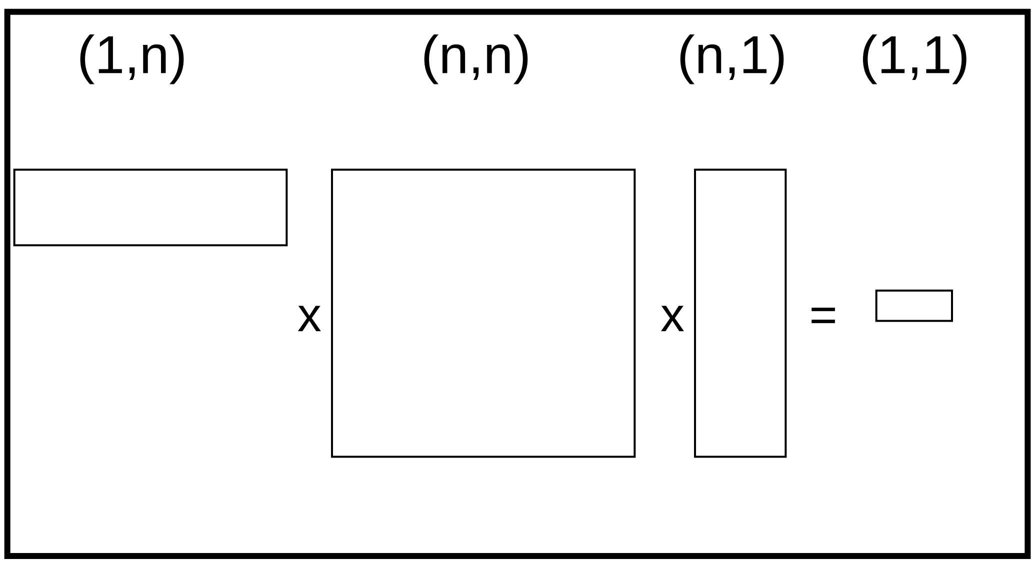
C:	Matrice de Corrélation
V:	Matrice de Variance Covariance
P	Vecteur Colonne des Positions en Euro
W	Vecteur Colonne des VAR Individuelles signées

Formule Excel – vecteurs lignes

Utilisation des formules Excel sur les matrices:

VAR=ALPHA*RACINE(PRODUITMAT(P;PRODUITMAT(V; TRANSPOSE(P))))

VAR=RACINE(PRODUITMAT(W;PRODUITMAT(C;TRANSPOSE(W))))



C:	Matrice de Corrélation
V:	Matrice de Variance Covariance
P	Vecteur Ligne des Positions en Euro
W	Vecteur Ligne des VAR Individuelles signées

Calcul VAR Excel

La formule Excel de calcul de la VAR utilise la formule suivante:

PRODUITMAT(P;PRODUITMAT(V; TRANSPOSE(P))

qui est une forme quadratique, dont le résultat est un scalaire et non pas un vecteur ou une matrice.

Cette formule est équivalente à la formule matricielle suivante:

SOMME(P.V.TRANSPOSE(P))

Où les produits sont de simples multiplications et non pas des produits de matrices.

La Position de Change

FINKEYS FRANCE

Position de Change

Détermination d'une position de change à une date donnée

- Sur les activités économiques
  - Cycle import export
  - Filiales étrangères
- Sur les instruments financiers
  - Change au comptant
  - Change à terme

Equivalent cash : effet change/taux et cash/terme

Incertitude temporelle, uniquement sur la position = risque commercial

L’impact de Change - Economique

Principes

- Tous les flux ont une devise propre

  -> devise de trésorerie
- Les actifs sont valorisés dans une devise

  -> devises de valorisation des Actifs
- Les résultats sont produits dans une seule devise par portefeuille

  -> devise de résultat

- Le résultat est calculé dans la devise du portefeuille:
  - La trésorerie (agios) et le réalisé sont calculés en devise de trésorerie, puis contrevalorisés dans la devise du résultat
  - Le latent est calculé en devise de l’actif, puis contrevalorisé dans la devise du résultat

L’impact de Change - Economique

- En pratique, il existe deux méthodes de contrevalorisation
  - Calculer le résultat en devises et convertir ce résultat avec le cours unique fin de période
  - Calculer le résultat comme différence des contrevaleurs à chaque date

- Le choix de la méthode à retenir dépend du type de gestion des résultats, mais en général, on retiendra la première méthode

Exemple de Change

- Achat d’un actif en dollar dont le prix varie de 100 à 150 entre la date d’achat et la date de vente, avec une période intermédiaire:
- Calculer le résultat en Euro sur les périodes:

Date d’achat :	100 usd cours 1,25	= 80,0 euros
Date intermédiaire :	120 usd cours 1,20	= 100,0 euros
Date de vente :	150 usd cours 1,30	= 115,4 euros

Exemple de Change

- Achat d'un actif en dollar dont le prix varie de 100 à 150 entre la date d'achat et la date de vente, avec une période intermédiaire :

- Date d'achat : 100 usd cours 1,25 = 80,0 euros
- Date intermédiaire : 120 usd cours 1,20 = 100,0 euros
- Date de vente : 150 usd cours 1,30 = 115,4 euros

En euro :

- passage de 80 à 100, gain de 20
- passage de 100 à 115.4, gain de 15,4

Gain 35.4 euro

- passage de 80 à 115.4, gain de 35.4

Gain 35.4 euro

En devise :

- passage de 100 à 120, gain de 20, converti en 16.7
- Passage de 120 à 150, gain de 30, converti en 23.1

Gain 39.8 euro

- passage de 100 à 150, gain de 50, converti en 38,5

Gain 38.5 euro

Reporting PL en Devises

Reporting: DEVISE CV EUR

	04-mai	05-mai	Daily			04-mai	05-mai	Daily
	MTM	MTM	PL			MTM	MTM	PL
USD	100,0	120,0	20,0		USD	100,0	120,0	20,0
EUR	83,3	100,0	16,7		EUR	80,0	100,0	20,0
fx	1,20	1,20			fx	1,25	1,2	
	05-mai	06-mai	Daily			05-mai	06-mai	Daily
	MTM	MTM	PL			MTM	MTM	PL
USD	120,0	150,0	30,0		USD	120,0	150,0	30,0
EUR	92,3	115,4	23,1		EUR	100,0	115,4	15,4
fx	1,30	1,30			fx	1,2	1,30	
	04-mai	06-mai	Daily			04-mai	06-mai	Daily
	MTM	MTM	PL			MTM	MTM	PL
USD	100,0	150,0	50,0		USD	100,0	150,0	50,0
EUR	76,9	115,4	38,5		EUR	80,0	115,4	35,4
fx	1,30	1,30			fx	1,25	1,30	

Le Résultat de Change Comptable

La Position de Change

- Toutes les écritures en devises sont enregistrées en devise et dans un compte de contrevaleur Euro
  - Écritures d’engagement: bilan et hors bilan
  - Ecritures de valorisation (fin de mois au cours comptable/éco de fin de mois)
- Via des comptes de position de change
  - Position de change au comptant
  - Position pour schéma comptable particulier: change à terme, CIRS
  - Position pour enregistrer les latents en devises (position de change résultat)
- Valorisation des comptes de position de change en fin de mois et production d’un résultat de change
  - Il existe aussi des comptes de position de change non réévaluables
  - Et des compte de position hors bilan réévaluables
- **Position de change sur résultat : difficultés pour distinguer les positions de couverture des positions de résultat: « sortie » du résultat réalisé**

Le Résultat de Change

Achat et Vente de Devises

Ccy	Devises	Euros
USD	100	80
JPY	10 000	120
GBP	800	400

Enregistrement avec un cours effectif

Valorisation en fin de mois

Ccy	Devises	Euros
USD	100	80 + 13
JPY	10 000	120 - 14
GBP	800	400 + 5

Passage en compte de résultat de 13-14+5 = 4 en euro
La nouvelle situation donne un compte de position équilibré
Le compte Euro mélange des flux réels et des flux de valorisation

Le Résultat de Change

Ecritures en Devise : intérêt en devise

Ccy	Devises	CV Euros
USD	100	*82*
JPY	10 000	*125*
GBP	800	*410*

Enregistrement avec le cours de change du jour de l'écriture

Valorisation en fin de mois

Ccy	Devises	Euros
USD	100	82 + 11 = 93
JPY	10 000	125 - 9 = 116
GBP	800	410 - 5 = 405

Passage en compte de résultat de 11-9-5 = -3 en euro
La nouvelle situation donne un compte de position équilibré
Le compte EURO n'est qu'un compte de valorisation

Cession des Résultats en Devises

- Deux modes de fonctionnement sont possibles :
  - Centralisation: le risque de change est géré en global: les conversions sont déclenchées à partir d'un seuil prédéfini.
  - Local: le risque de change est géré par chaque opérateur (tous les portefeuilles ont la devise comptable comme devise de résultat): les conversions sont du ressort de l'opérateur qui doit respecter des limites.
- En règle générale, l'horizon de cession est le mois.
- En gestion centralisée: le résultat de change est réaffecté aux portefeuilles
- En gestion locale, les opérations de change sont intégrées au portefeuille
- En comptabilité, les opérations de cession sont enregistrées par portefeuilles, ou bien centralisées dans des comptes particuliers.
- **En fin d'année, ces positions permettent de « liquider » les positions de change résultat : sur latent, réalisé et trésorerie.**

La Théorie de l’Arbitrage

FINKEYS FRANCE

OBJECTIFS

- Valider la zone de prix actuels admissibles
- Calculer le taux sans risque
- Calculer les probabilités « risque neutre »

DONNEES

- Les prix futurs de chaque actif dans chaque scénario futur

CONTRAINTES

- Vérification de l'Absence d'Opportunité d'Arbitrage (AOA)
- Choisir un taux d'intérêt sans risque (TSR)

DONNEES

- n Actifs
- n Etats futurs

Le problème exige égalité entre le nombre d'actifs et le nombre d'états futurs.

Soit, le nombre de données suivant:

- n x n valeurs futures
- et n valeurs actuelles à valider

Total de n x (n+1) données

Si n = 2 : 6 données: 4 valeurs futures et 2 valeurs actuelles

Si n = 3 : 12 données: 9 valeurs futures et 3 valeurs actuelles

Si n = 4 : 20 données: 16 valeurs futures et 4valeurs actuelles

DONNEES DE MARCHE:

n=2 actifs et 2 états futurs h(haut) et b(bas)

2 prix actuels (px1,px2) et 4 prix futurs

	Actif 1	Actif 2
Prix Actuel	60	85
Prix Futur Etat h	90	150
Prix Futur Etat b	55	60

Question: les 2 Prix Actuels de px1=60 et px2=85 sont-ils valides?

Présentation du problème avec N=2

Soit x et y les composantes du portefeuille

Soit V la valeur du portefeuille actuel (prix à l'achat/vente)

Soit Vb et Vh les valeurs du portefeuille dans chaque scénario futur

Equations:

$V = px1.x + px2.y = 60\,x + 85\,y$

$Vh = 90\,x + 150\,y$

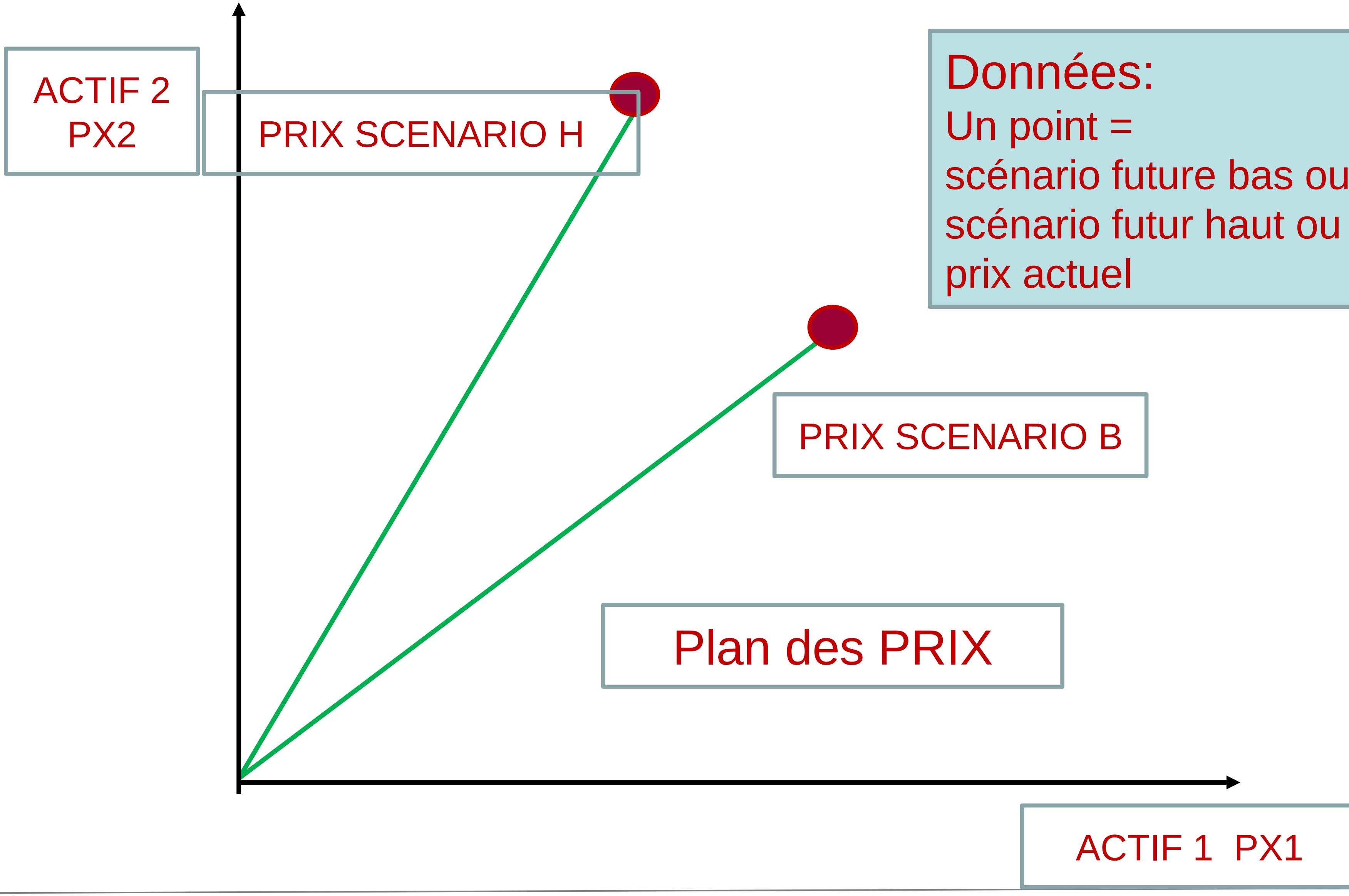
$Vb = 55\,x + 60\,y$

2 représentations graphiques:

Dans le plan des PRIX (px1,px2) – avec prix positifs

Dans le plan du portefeuille PTF (x,y) – avec composantes positives ou négatives

Plan PRIX – Graphique 2D



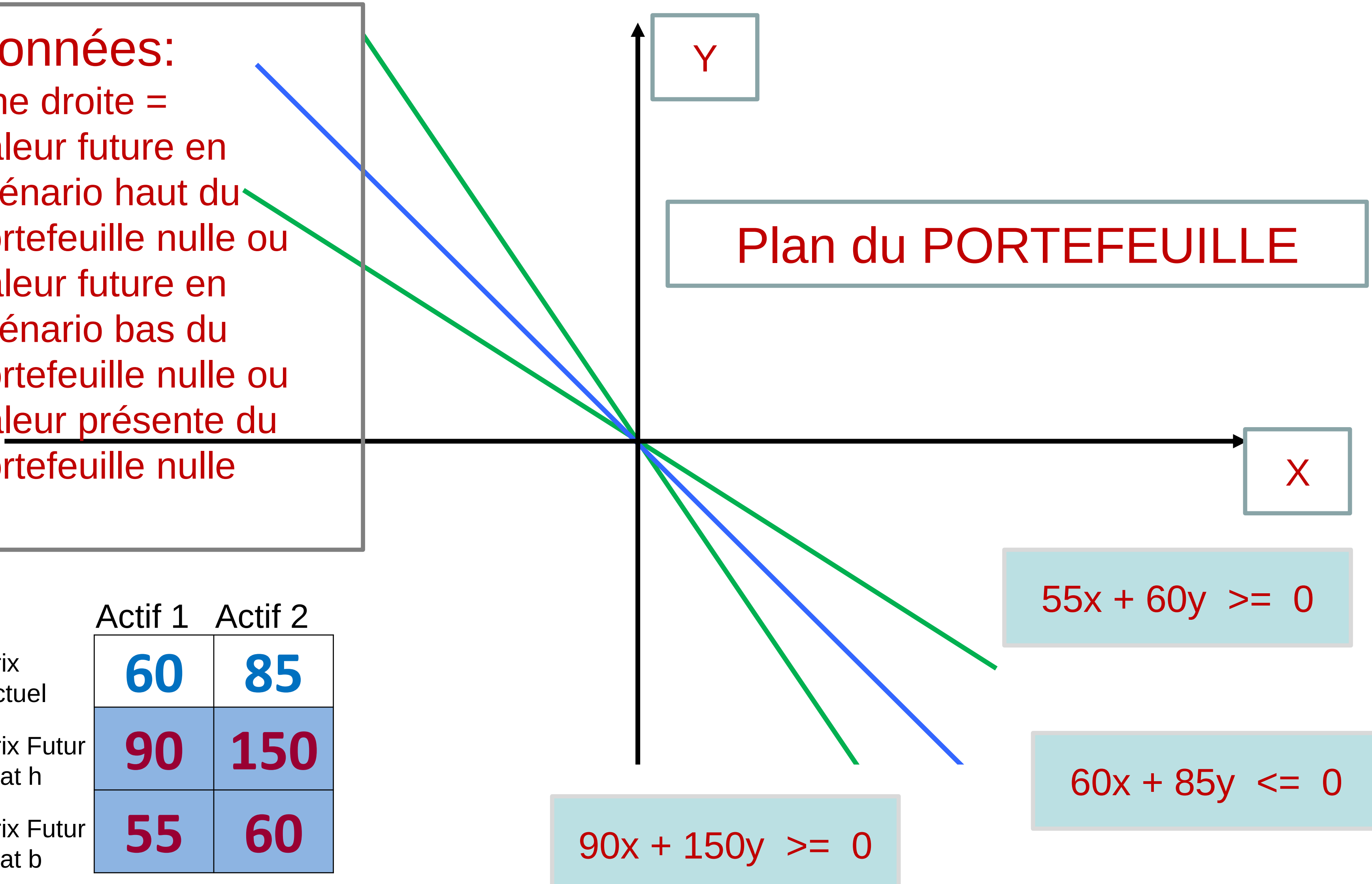
Données:

Un point =
scénario future bas ou
scénario futur haut ou
prix actuel

Plan PTF – Graphique 2D

GESTION DU CHANGE

Données:
Une droite =
Valeur future en scénario haut du portefeuille nulle ou
Valeur future en scénario bas du portefeuille nulle ou
Valeur présente du portefeuille nulle



	Actif 1	Actif 2
Prix Actuel	60	85
Prix Futur Etat h	90	150
Prix Futur Etat b	55	60

CALCULS PRÉLIMINAIRES:

Soit les 2 portefeuilles suivants:

	port A	port B
actif 1	**50**	**20**
actif 2	**20**	**10**

Déterminer la valeur actuelle de chaque portefeuille

Déterminer les valeurs futures de chaque portefeuille dans chacun des 2 états

Marché:

$$M = \begin{pmatrix} 90 & 150 \\ 55 & 60 \end{pmatrix}$$

Portefeuilles Tests - solutions

	port A	port B	port A+B
actif 1	**50**	**20**	70
actif 2	**20**	**10**	30
Prix actuel	4700,00	2050,00	6750,00
Etat U	7500,00	3300,00	10800,00
Etat D	3950,00	1700,00	5650,00

$$50.60 + 20.\ \ 85 \quad = 4700$$
$$50.90 + 20.150 \quad = 7500$$
$$50.55 + 20.60 \quad = 3950$$

$$\begin{pmatrix} 90 & 150 \\ 55 & 60 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7500 \\ 3950 \end{pmatrix}$$

Portefeuille test - Calcul Matriciel

GESTION DU CHANGE

MATRICE DE MARCHE : M

Ligne: états

Colonne: actifs

$$M = \begin{pmatrix} 90 & 150 \\ 55 & 60 \end{pmatrix}$$

Portefeuilles Tests

$$\begin{pmatrix} 90 & 150 \\ 55 & 60 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7500 \\ 3950 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 90 & 150 \\ 55 & 60 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3300 \\ 1700 \end{pmatrix}$$

	port A	port B	port A+B
actif 1	**50**	**20**	70
actif 2	**20**	**10**	30
Prix actuel	4700,00	2050,00	6750,00
Etat 1	7500,00	3300,00	10800,00
Etat 2	3950,00	1700,00	5650,00

AOA - Non Arbitrage

AOA : Absence d’Opportunité d’Arbitrage

Conditions d’arbitrage équivalent à un gain positif quelque soit les états futurs, ou une perte quelque soit les états futurs.

On exclut les cas futurs où les n portefeuilles futurs ont tous des valeurs positives ou tous des valeurs négatives.

Graphiquement, on exclut les zones suivantes:

90 x + 150 y >= 0 (état H) intersection 55 x + 60 y >= 0 (état B)

Union

90 x + 150 y <= 0 (état H) intersection 55 x + 60 y <= 0 (état B)

Ce qui donne graphiquement 2 zones:

AOA - Non Arbitrage N=2

La zone acceptable AOA est uniquement la zone entre les deux droites

$90 x + 150 y >= 0$ et $55 x + 60 y <= 0$

union

$90 x + 150 y <= 0$ et $55 x + 60 y >= 0$

Interprétation à partir des pentes:

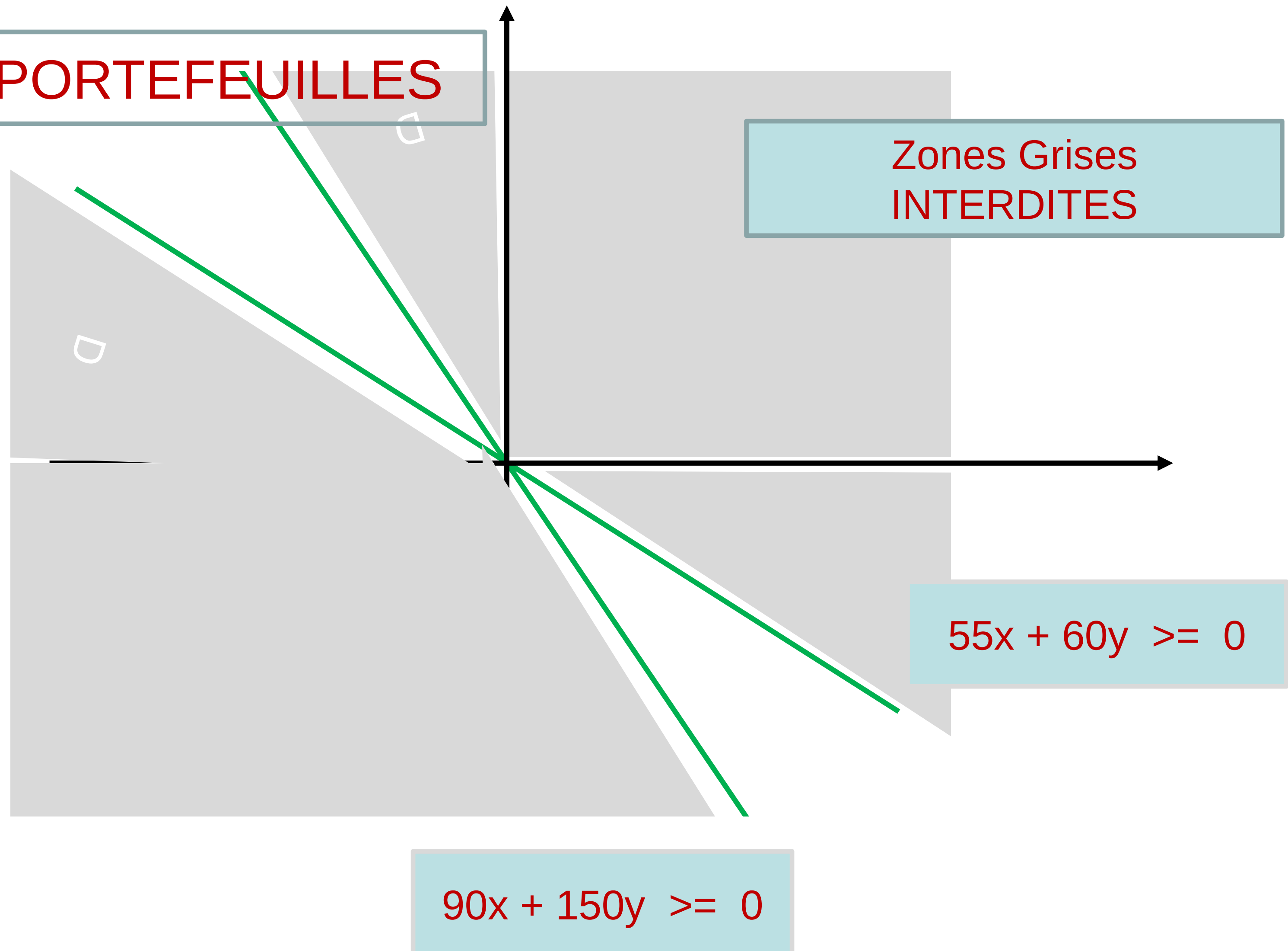
La pente de la droite des prix actuels doit être comprise entre les pentes des droites des états H et B.

Etat Haut:	$90 x + 150 y$	pente -1,6667
Etat Bas:	$55 x + 60 y$	pente -1,0909
Droite Prix actuels:	$60 x + 85 y$	pente -1,4167

Ces prix sont valides car $1{,}0909 < 1{,}4167 < 1{,}6667$

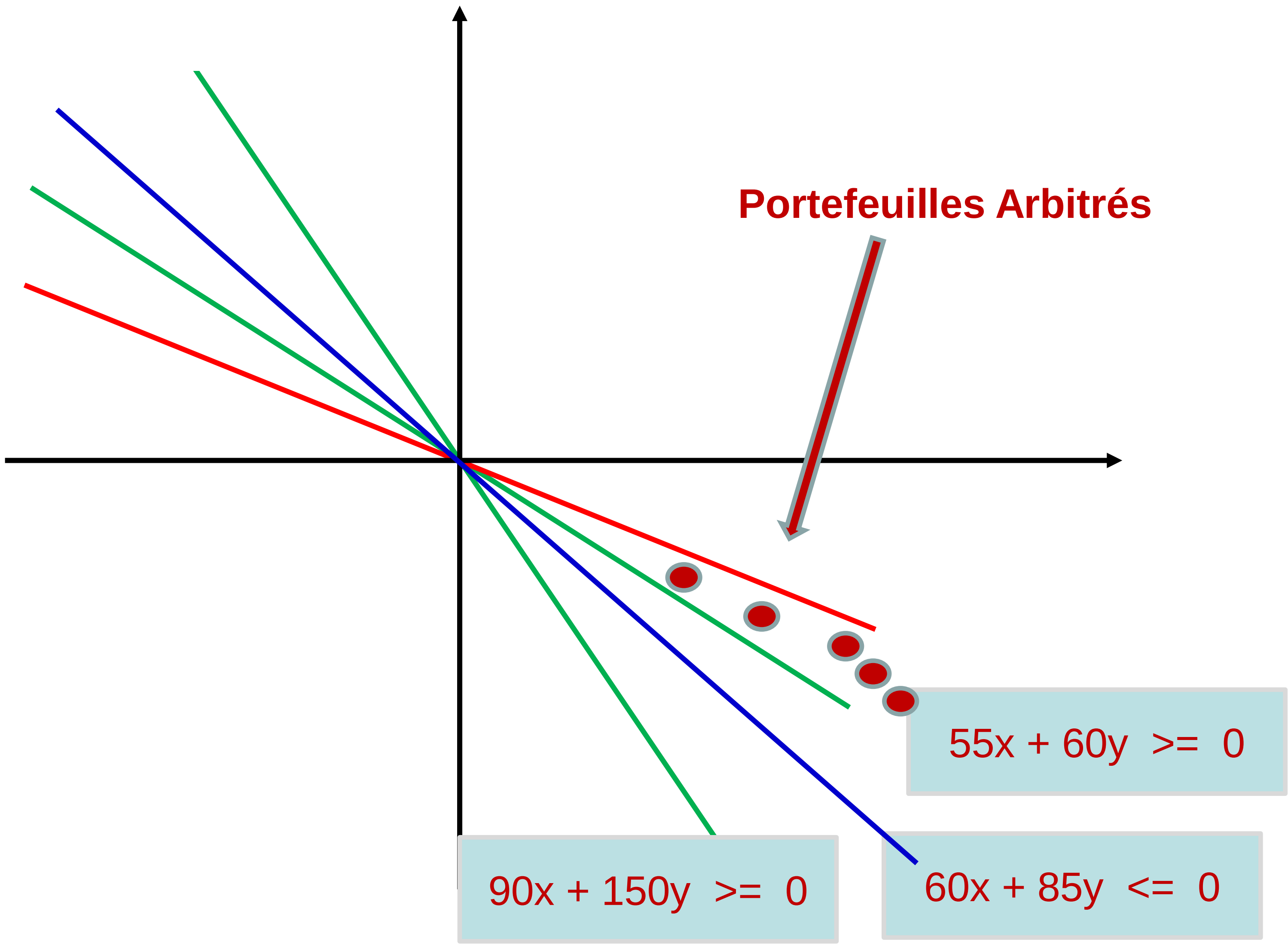
Non Arbitrage – Graphique 2D

Plan des PORTEFEUILLES



Arbitrage – Graphique 2D

GESTION DU CHANGE



DEFINITIONS

Un portefeuille Arrow-Debreu (ptf AD), est un portefeuille qui rapporte 1 dans un état futur et 0 dans tous les autres états.

DONNEES

Dans notre cas, il existe n portefeuilles Arrow-Debreu

Chacun de ces portefeuilles possède un prix actuel

MOYEN

Ces portefeuilles sont obtenus en inversant la matrice de marché

CALCUL DES PORTEFEUILLES ARROW-DEBREU

1. Déterminer le portefeuille X qui rapporte 1 dans l'état 1 et 0 dans l'état 2
2. Déterminer le portefeuille Y qui rapporter 0 dans l'état 1 et 1 dans l'état 2
3. Déterminer le portefeuille Z qui rapporte 1 dans l'état 1 et 1 dans l'état 2
4. Décomposer les portefeuilles

   A et B avec les portefeuilles

   X et Y

	Actif 1	Actif 2
Prix Actuel	60	85
Prix Futur Etat HAUT	90	150
Prix Futur Etat BAS	55	60

Ptf Arrow-Debreu – matrice

$$\begin{pmatrix} 90 & 150 \\ 55 & 60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X1 & Y1 \\ X2 & Y2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X1 & Y1 \\ X2 & Y2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 & 150 \\ 55 & 60 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -0.0211 & 0.0526 \\ 0.0193 & -0.0316 \end{pmatrix}$$

matrice inverse	Port X	Port Y	port X+Y
actif 1	-0,0211	0,0526	0,0316
actif 2	0,0193	-0,0316	-0,0123
	px	py	px+py
prix	**0,3772**	**0,4737**	**0,8509**
Etat 1	1,00	0,00	1,00
Etat 2	0,00	1,00	1,00

GESTION DU CHANGE

$$\begin{pmatrix} 7500 & 3950 \\ 3300 & 1700 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0,3772 \\ 0,4737 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4700 \\ 2050 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 90 & 150 \\ 55 & 60 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 60 \\ 105 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3772 \\ 0,4737 \end{pmatrix}$$

matrice inverse	Port X	Port Y	port X+Y
actif 1	-0,0211	0,0526	0,0316
actif 2	0,0193	-0,0316	-0,0123
	px	py	px+py
Prix Actuel	**0,3772**	**0,4737**	**0,8509**
Prix Futur Etat U	1,00	0,00	1,00
Prix Futur Etat D	0,00	1,00	1,00

OBJECTIFS

A partir des portefeuilles Arrow-Debreu, obtenir le taux sans risque de passage de la période présente à la période future

MOYEN

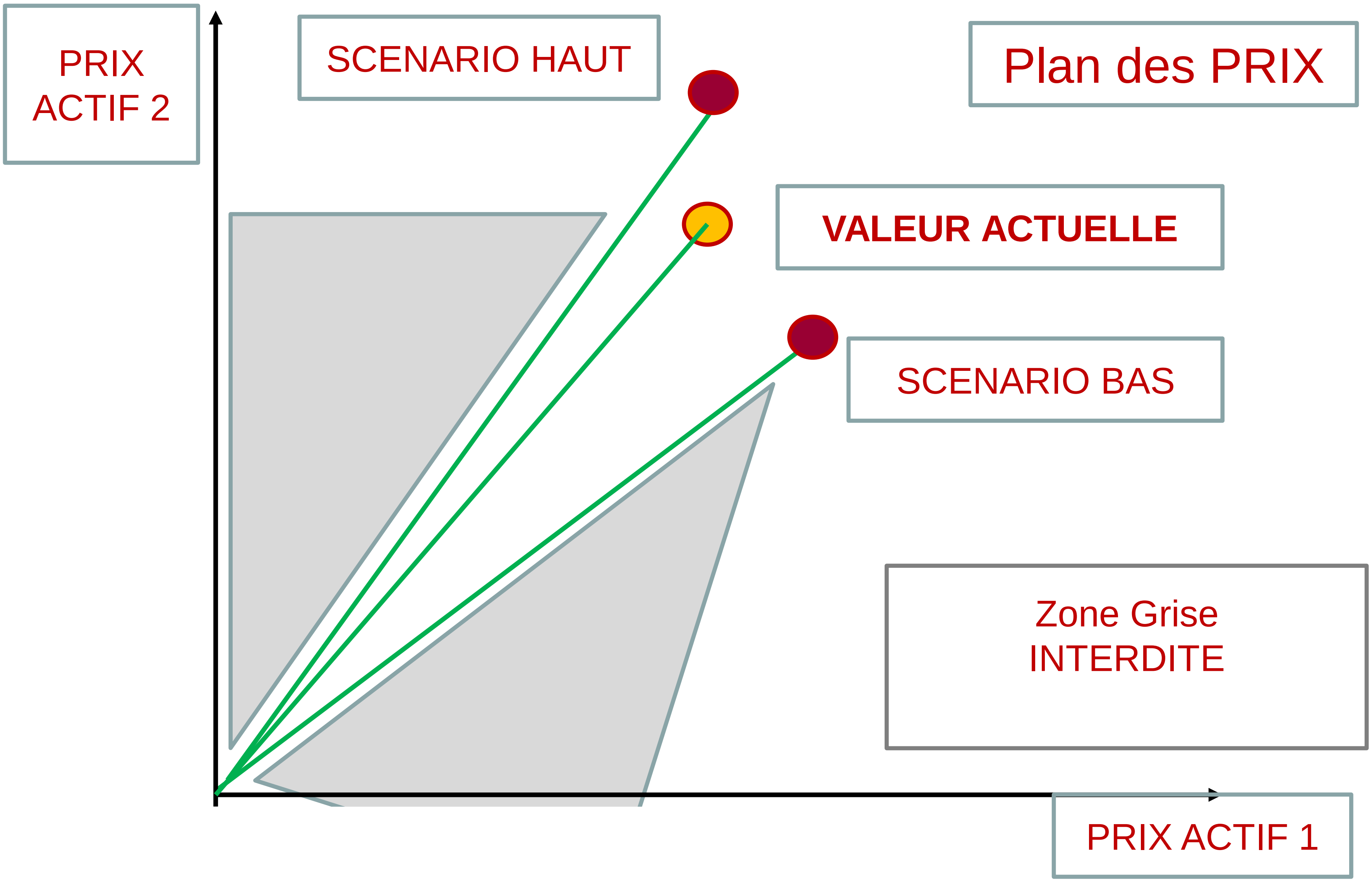
La somme des portefeuilles Arrow-Debreu, possède un pay-off de 1 dans tous les cas futurs.

Ce portefeuille est totalement déterministe

Sa valeur présente est égale à la somme des n portefeuilles Arrow-Debreu : S

Le taux sans risque est égal à : TSR = 1/S-1, avec une période égale à l'unité.

Prix Futurs – Graphique 2D



Portefeuilles Arrow-Debreu

X = (-0,0211 ; 0,0193)   valeur = 0,3772

Y = (0,0526 ; -0,0123)   valeur = 0,4737

Portefeuille X+Y = (0,315 ; 0,0070) valeur = 0,8509

Ce portefeuille valant 0,8509, vaudra =1

Donc 0,8509 (1 + TSR) = 1

TSR = 17,53%

matrice inverse	Port X	Port Y	port X+Y
actif 1	-0,0211	0,0526	0,0316
actif 2	0,0193	-0,0316	-0,0123

GESTION DU CHANGE

OBJECTIFS

Identifier la zone acceptable des prix actuels.

Chaque solution de prix actuels, génère un taux sans risque

Identifier la zone pour laquelle le taux sans risque est nul

MOYEN

Inversons la méthode de calcul précédente: à partir des valeurs des portefeuilles AD, obtenons les prix actuels

$$\begin{pmatrix} 60 \\ 105 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 & 150 \\ 55 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}3772 \\ 0{,}4737 \end{pmatrix}$$

Prix Actuels = M x valeurs ptf AD

GESTION DU CHANGE

RESULTAT

$$\begin{pmatrix} 60 \\ 105 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 & 150 \\ 55 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}3772 \\ 0{,}4737 \end{pmatrix}$$

Calculons les prix actuels avec les portefeuilles AD (1,0) et (0,1), dont la somme des valeurs est égale à 1 et qui représentent donc un TSR nul

Avec (1,0), prix actuels = (90 ; 55)

Avec (0,1), prix actuels = (155 ; 60)

CONCLUSION

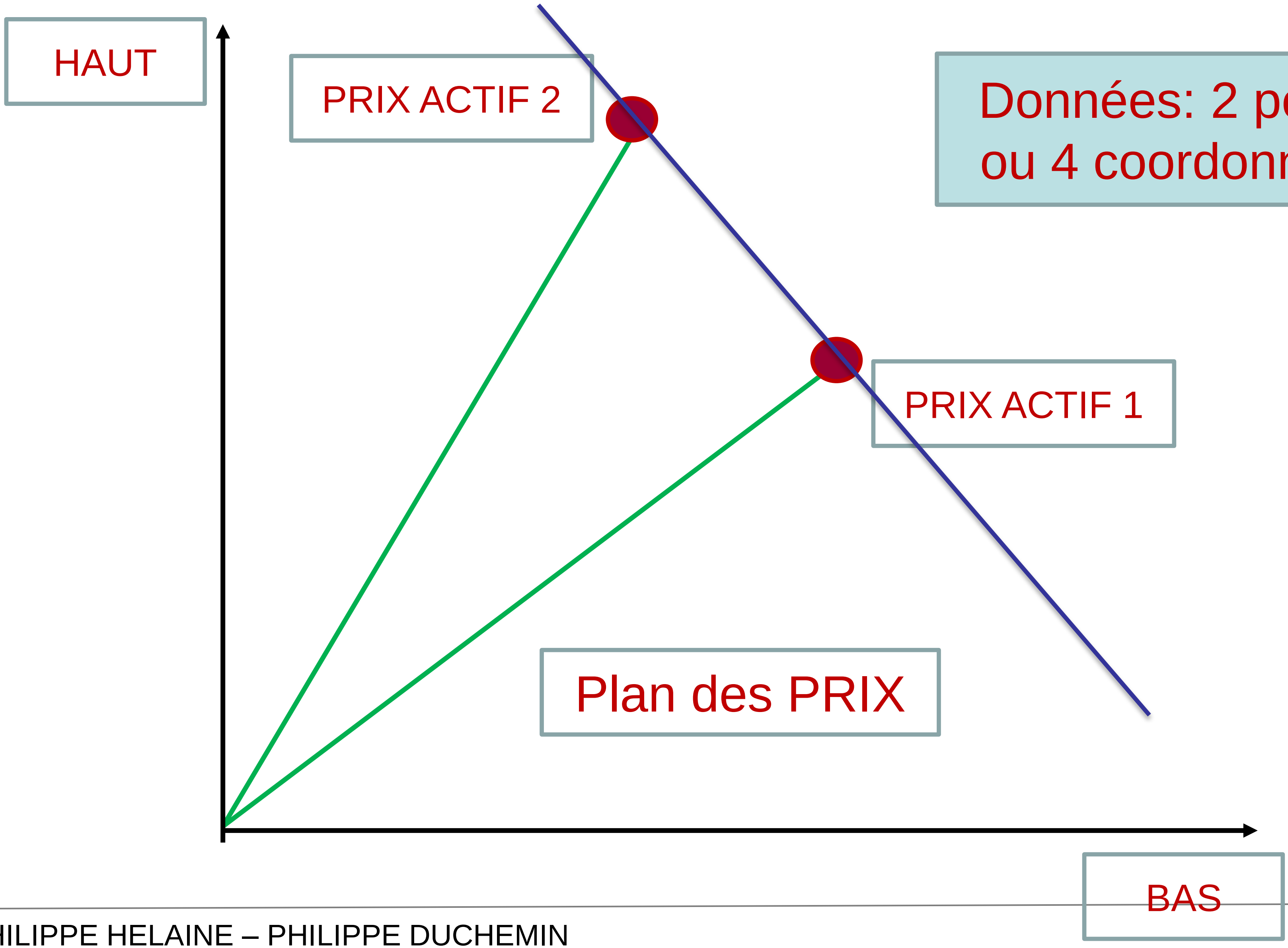
Les deux points X et Y, en tant que prix actuels, ont un taux sans risque nul.

CORROLAIRES

La droite de TSR nul est la droite passant par X et Y

Les droites de TSR constant sont parallèles à cette droite

Prix Futurs – Graphique 2D



Valorisation 2D

PRIX

px = 0,3772 py = 0,4737

Somme = px+py = 0,8509

VALORISATION du portefeuille (x y) = x px + y py

Taux sans risque:TSR = (1 /(px+py)) – 1 = 17,53%

Probabilités Risques Neutres:

qx = px (1+TSR) = 0,44

qy = py (1+TSR) = 0,56

Avec qx+qy = 1 - > probabilités

VALORISATIONS FUTURES :

qx . x + qy . y = 0,44 . x + 0,56 . y

Le Modèle Binomial

FINKEYS FRANCE

Modèle Binomial

Définition du modèle entre 2 dates: T_0 et T_1

Marché avec 2 actifs: l'actif sans risque et l'actif risqué

<u>Modélisation de l'actif sans risque:</u>

- taux sans risque <u>annuel</u>: r
- passage de C_0 en T_0 à $C_0.(1+r.t)$ en T_1 (avec durée annuelle t=1)

<u>Modélisation de l'actif risqué avec 2 scénarios:</u>

Espace de probabilité à 2 états: u (up) et d (down)

- prix d'origine: S_0
- variation à la hausse: u (up)
- variation à la baisse: d (down)

$$\begin{tikzcd} & \boxed{S_1^+ = S_0 * u} \\ \boxed{S_0} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \boxed{S_1^- = S_0 * d} \end{tikzcd}$$

Réplication de portefeuille

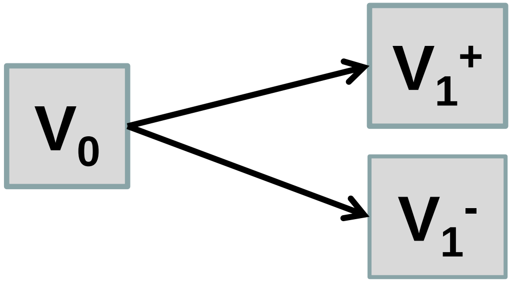
Modèle à 1 période et 2 instants: T_0 et T_1

Portefeuille avec 2 actifs: actif risqué (S) et actif sans risque (C)

L'instrument financier possède en T_0 la valeur V_0

et en T_1 les valeurs:

- scénario u: V_1^+
- scénario d: V_1^-



On cherche à répliquer l'instrument financier

en vue du calcul de son prix à l'instant T_0: V_0

2 inconnues : C (cash) en actif sans risque

Δ (delta) en actif risqué.

6 variables: V_1^+ , V_1^- (instrument)

et S_0 ,u, d et r (marché)

Equations

Modèle à 1 période et 2 instants: T_0 et T_1

Equations:

$$\begin{cases} V_1^+ = C(1+r) + \Delta S_1^+ \\ V_1^- = C(1+r) + \Delta S_1^- \end{cases}$$

ou,

$$\begin{cases} V_1^+ = C(1+r) + \Delta u S_0 \\ V_1^- = C(1+r) + \Delta d S_0 \end{cases}$$

$$V_0 = C + \Delta . S_0$$

Solutions:

$$\Delta = \frac{V_1^+ - V_1^-}{S_1^+ - S_1^-} = \frac{V_1^+ - V_1^-}{(u-d).S_0}$$

$$C = \frac{V_1^+.dS_0 - V_1^-.uS_0}{(1+r).(S_1^- - S_1^+)} = \frac{V_1^+.d - V_1^-.u}{(1+r).(d-u)}$$

d'où la valeur du portefeuille égale à la valeur de l'instrument:

$$V_0 = C + \Delta.S_0 = \frac{V_1^+.d - V_1^-.u}{(1+r).(d-u)} + \frac{V_1^+ - V_1^-}{(u-d)}$$

$$V_0 = \frac{1}{1+r}\left[\frac{((1+r)-d)}{(u-d)}V_1^+ + \frac{(u-(1+r))}{(u-d)}V_1^-\right]$$

$$\boxed{V_0 = \frac{1}{1+r}(pV_1^+ + qV_1^-)}$$

Réplication de portefeuille

Équations de départ:

$$\begin{cases} V_1^+ = C(1+r) + \Delta.u.S_0 \\ V_1^- = C(1+r) + \Delta.d.S_0 \\ V_0 = C + \Delta.S_0 \end{cases}$$

Formule de valorisation:

$$\boxed{V_0 = \frac{1}{1+r}(pV_1^+ + qV_1^-)}$$

Avec les probabilités risque neutre:

$$p = \frac{(1+r)-d}{u-d} \qquad q = \frac{u-(1+r)}{u-d}$$

Remarque fondamentale: p et q ne dépendent pas de S_0

Marché :

$u=2$, $d=1/2$, $r=1/4$, $S_0=4$

Instrument: $\begin{cases} V_1^+ = 1 \\ V_1^- = 0 \end{cases}$

Durée de la période: 1 an

Calculer la réplication de l'instrument: Δ et C

Calculer V_0 directement avec la réplication

Calculer les probabilités RN (p et q) et V_0

Calculer Δ et C, avec les données suivantes:

Marché :

u=2, d=1/2, r=1/4, S_0=4

$$\begin{cases} V_1^+ = 1 \\ V_1^- = 0 \end{cases}$$

Solution :

$$\Delta = \frac{V_1^+ - V_1^-}{S_1^+ - S_1^-} = \frac{V_1^+ - V_1^-}{(u-d).S_0} = \frac{1-0}{(2-0.5).4} = \frac{1}{6} = 0.1666$$

$$C = \frac{V_1^+.dS_0 - V_1^-.uS_0}{(1+r).(S_1^- - S_1^+)} = \frac{V_1^+.d - V_1^-.u}{(1+r).(d-u)} = \frac{1x0,5 - 0x2}{(1,25)x(0,5-2)} = -\frac{1/2}{5/4.3/2} = -\frac{4}{15} = -0,2666$$

$$\Delta.S_0 = \frac{4}{6} = 0,6666 \qquad V_0 = C + \Delta.S_0 = -\frac{4}{15} + \frac{2}{3} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Exercice - correction

GESTION DU CHANGE

$$p = \frac{(1+r)-d}{u-d} \qquad q = \frac{u-(1+r)}{u-d} \qquad V_0 = \frac{1}{1+0{,}25}(0{,}5.1+0{,}5.0) = 0{,}4$$

$$p = \frac{(1+0{,}25)-0{,}5}{2-0{,}5} = 0{,}5 \qquad q = \frac{2-(1+0{,}25)}{2-0{,}5} = 0{,}5$$

	actif 1	actif 2	pente	CONDITION AOA
état 1	1,25	8	-6,40	VRAI
état 2	1,25	2	-1,60	VRAI
PRIX	1	4	-4,00	**NOARB**
prix TSR	0,4000	0,4000	0,80	25,00%
pRN	0,5000	0,5000	1,00	
	-0,2667	1,0667		
	0,1667	-0,1667		

Autres Probabilités

Interprétation des formules suivantes:

$$V_0 = \frac{1}{1+r}(pV_1^+ + qV_1^-)$$

Autre probabilité:

$$p^* = \frac{u.((1+r)-d)}{(1+r).(u-d)} \qquad q^* = \frac{d.(u-(1+r))}{(u-d).(1+r)}$$

Probabilité historique (objective), avec r = 0:

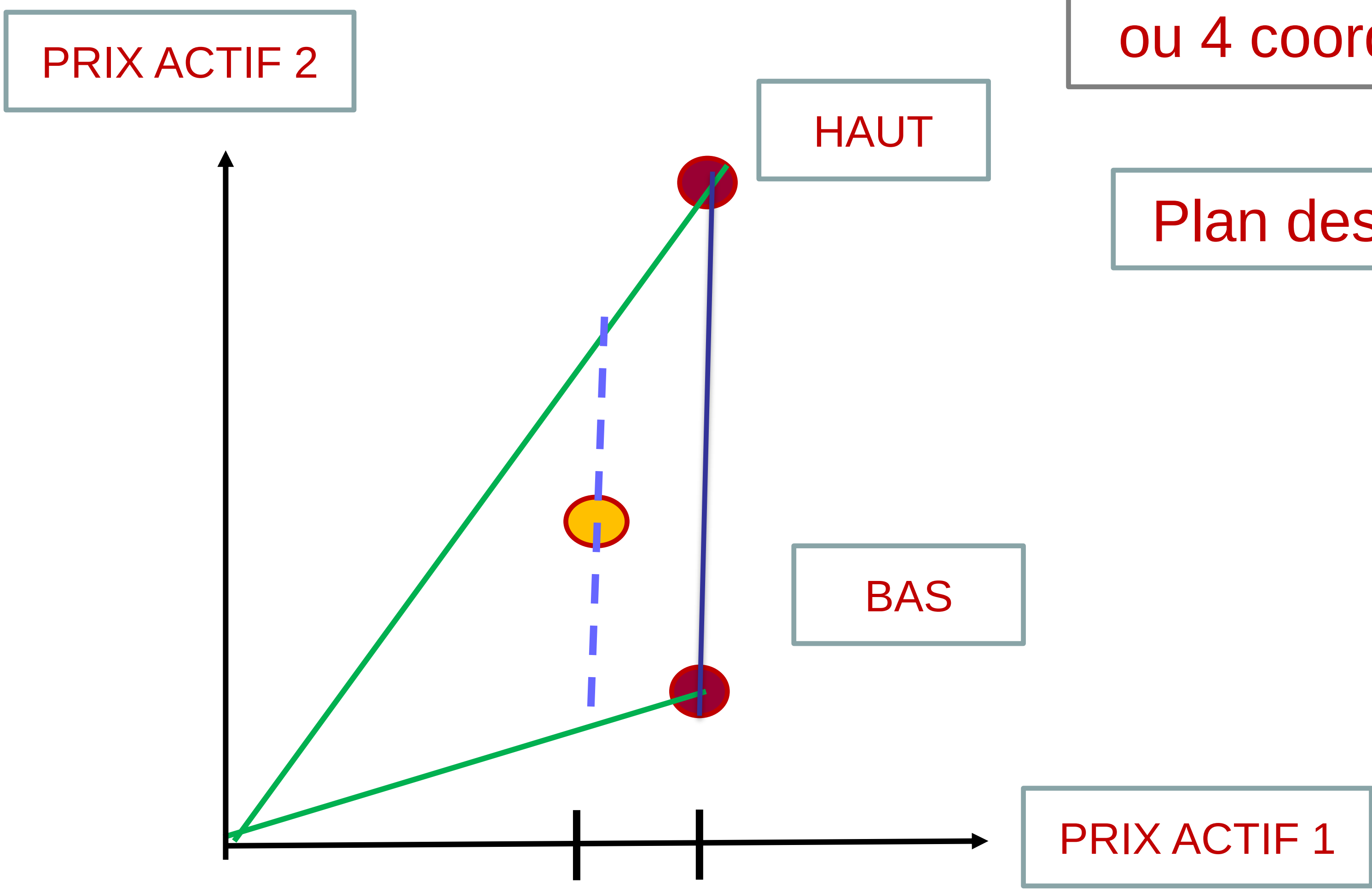
$$p' = \frac{1-d}{u-d} \qquad q' = \frac{u-1}{u-d}$$

(p* , q*) et (p’ , q’) sont des probabilités, tel que: p+q=1

Prix Futurs – Graphique 2D

Données: 2 points ou 4 coordonnées

Plan des PRIX



Lien avec Théorie de la Finance

Valeurs Futures:

Actif sans risque: 1,25 dans les 2 scénarios

Actif risqué: S.u et S.d

Matrice de Marché:

$$M = \begin{pmatrix} 1{,}25 & 2 \\ 1{,}25 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Inversion de la matrice de Marché:

$$1/M = \begin{pmatrix} -0{,}266 & 1{,}06 \\ 0{,}66 & -0{,}66 \end{pmatrix}$$

Valeur Actuelle V:

Somme de la première colonne de 1/M = -0,26+0,66 = 0,4

Exercice

Instrument: $S_0 = 100$ et $K = 105$

Marché : $u=1.1$ $d=0,95$ $R=5\%$

Durée de la période: 6 mois = 0,5 an

Prendre r= 5%/2 = 2.5%

1 - Calculer : $\mathbf{V_1^-}$ et $\mathbf{V_1^+}$:

2 - Calculer les probabilités risque neutre:

3 - Calculer les valeurs Δ et C

4 - Calculer la valeur du call avec les probabilités RN

5 – Calculer ces valeurs avec les probabilité (p*,q*) et (p'q')

6 - Complément: trouver le prix d'exercice K, afin d'obtenir un $\Delta = 0.75$

7 - Calculer la valeur du put

Exercice - correction

Instrument: S_0 = 100 et K = 105

Marché : u=1.1 d=0,95 R=5%

Durée de la période: 6 mois = 0,5 an

Prendre r= 5%/2 = 2.5%

1 - Calculer : $\mathbf{V_1^-}$ et $\mathbf{V_1^+}$: S1+=1,1.100 = 110, S1-=0,95.100=95

V1+=max(110-105,0)=5 V1-=max(95-105,0)=0

2 - Calculer les probabilités risque neutre: p et q p=0,5 q=0,5

3 - Recalculer les valeurs Δ et C: C=-30,89 Δ=0,3333

4 - Calculer la valeur du call : $\mathbf{V_0}$: 2,4390

5 - Calculer V0 sous les probabilité (p*,q*) et (p'q') = (0,53;0,46) (1/3,2/3)

6 - Complément: trouver le prix d'exercice K, afin d'obtenir un Δ = 0.75: K=98,75

7 - Calculer la valeur du put: 4,8780

Modèle Binomial

Discrétisation de la durée: découpage de la durée en n périodes

Mise en œuvre d’un arbre binomial pour

- Les prix futurs
- Les probabilités (ou comptage de chemins)

On obtient ainsi une simulation numérique.

Arbre des Prix Futurs

Durée totale T découpée en n périodes, pas t = T/n

Les prix se construisent à partir de : S, u et d.

Modèle de l'actif sans risque: passage de 1 à $(1+r)^n$

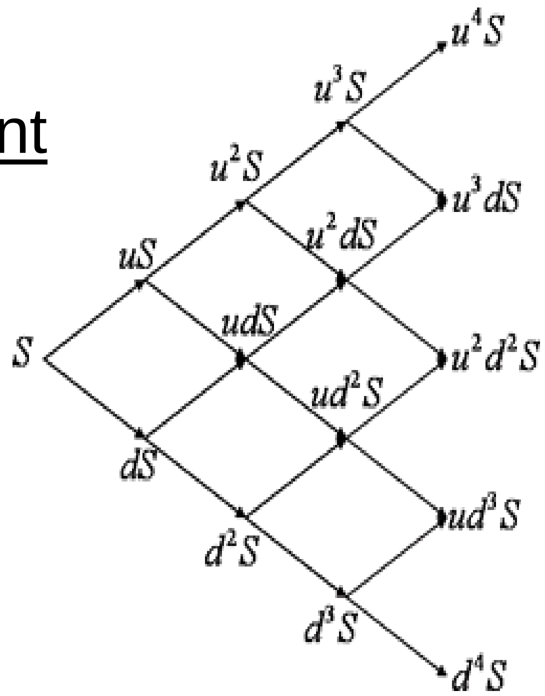
Modèle de l'actif risqué: arbre recombinant

Valeur initiale: S

Valeurs finales:

$$S_i = S.u^i.d^{n-i}$$

n périodes, n+1 états finaux, 2^n chemins



Arbre des Probabilités

L'arbre des probabilités se construit à partir des probabilités RN : p et q

Chemin « up » avec probabilité: p

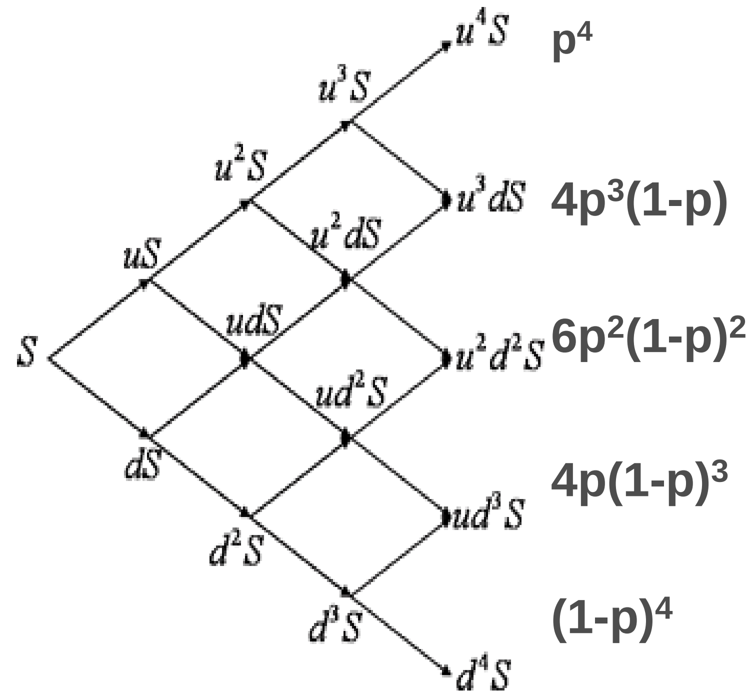
Chemin « down » avec probabilité: q

Probabilité de la valeur maximale: p^n

Probabilité de la valeur minimale: q^n

Probabilité intermédiaire au noeud i

$$P_i = \binom{n}{i} p^i . q^{n-i}$$



Somme des probabilités finales:

(loi binomiale)

$$\sum_{i=0}^{n} P_i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} . p^i . q^{n-i} = 1$$

Pay Off Terminal

Détermination du pay-off sur les (n+1) valeurs finales (à maturité)

option digitale TOR « tout ou rien » call: (S>K) . 1

option digitale TOR « tout ou rien » put: (K>S) . 1

option digitale COR « cash ou rien » call: (S>K) . S

option digitale COR « cash ou rien » put: (S<K) . S

Call: (S>K).(S-K) = (S > K) . S - (S > K) .K

Put : (S<K).(K-S) = (S < K). K - (S > K) . S

Valorisation

Formule générale de valorisation

- La valeur future est égale à l’espérance mathématique du pay-off: produit de la valeur finale de l’instrument et de sa probabilité
- La valeur actuelle est égale à la valeur future actualisée

$$\boxed{V_0 = \frac{1}{(1+r)^n}\left(\sum_{i=0}^{n} P_i V_i\right)}$$

Passage au logarithme

Construction de l'arbre ln(S) à partir de S

$$S_i = S.u^i.d^{n-i}$$

$$\ln(S_i) = \ln(S) + i.\ln(u) + (n-i).\ln(d)$$

$$\ln(S_i / S) = n.\ln(d) + i.\ln(u/d)$$

$$i = \frac{\ln(Si / (S.d^n))}{[\ln(u/d)]}$$

Equidistance des intervalles entre les états adjacents

Ecart égal à ln(u) – ln(d) = ln(u/d)

Valeur maxi: S.n.ln(u)

Valeur mini: S.n.ln(d)

Bornes Arbre Binomial

Option CALL européenne: pay-off = (S>K).(S-K)

Option PUT européenne: pay-off = (S<K).(K-S)

Le call revient à prendre la partie supérieure de l’arbre binomial

Le put revient à prendre la partie inférieure de l’arbre binomial

Calcul de l’indice w, à partir duquel la sommation est effectuée

Cet indice w, correspond à la valeur du prix d’exercice K

Wc= arrondi.sup(w)

Wp=arrondi.inf(w)

wp+wc=n-1

$$w = \frac{\ln\left(\frac{K}{S}\right) - n.\ln(d)}{\ln(u/d)}$$

Exercice

Marché : u=2, d=1/2, R=1/4, S=4,

Instrument: Call avec prix d'exercice: K=5, Durée: T= 1 an

Modèle; N=6 - pas de calcul: 2 mois = 1/6 = 0,1666 an

- Calcul du taux période

Arbre des probabilités

- Calcul des probabilités RN: p et q
- Calcul des probabilités à maturité
- Calcul du nombre de chemins avec le coefficient binomial
- Vérifier que sur la somme des probabilités est égale à l'unité

Arbre des prix

- Calculer les valeurs finales
- Calculer le pay off final de l'option

Valorisation

- Calculer la valeur de l'option

Marché : u=2, d=1/2, R=1/4, S=4, n=6

Instrument: K=5 T=1

Durée: 1 an = 6 périodes

Calcul du taux période

1+r = (1+R)^(1/6) = (1+0,25)^(1/6) = 1,0379 alors r = 3,79%

p= (1,0379 – 0,5) / (2-0,5) = 0,3585 et q=0,6414

Probabilités							Chemins	P finale
1	0,358594	0,128590	0,046111	0,016535	0,005929	0,002126	1	0,002126
0	0,641406	0,230004	0,082478	0,029576	0,010606	0,003803	6	0,022819
0	0,000000	0,411402	0,147526	0,052902	0,018970	0,006803	15	0,102040
0	0,000000	0,000000	0,263876	0,094624	0,033932	0,012168	20	0,243354
0	0,000000	0,000000	0,000000	0,169251	0,060693	0,021764	15	0,326460
0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,108559	0,038929	6	0,233571
0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,069630	1	0,069630
								1,000000

Exercice - Correction

Marché : u=2, d=1/2, R=1/4, S=4, n=6

Instrument: Call avec prix d'exercice: K=5

	S(6)	PayOff Call	Nb de Chemins	Probabilité	Probabilité	Valeur à t=6	Pay Off Put
6	256	251	1	0,002126	0,00213	0,5337	0
5	64	59	6	0,003803	0,02282	1,3463	0
4	16	11	15	0,006803	0,10204	1,1224	0
3	4	0	20	0,012168	0,24335	0,0000	1
2	1	0	15	0,021764	0,32646	0,0000	4
1	0,25	0	6	0,038929	0,23357	0,0000	4,75
0	0,0625	0	1	0,069630	0,06963	0,0000	4,9375
		chemins:	64		1,0000	3,0025	3,0025
		chemins:	64				2,4020

w(inf) = ln(K / (S . d^n)) / ln(u/d) = 3,08 donc wc=4 et wc*=2

W(sup) = ln(S . u^n / K) / ln(u/d) = 2,91 donc wp=3

Pricing par Arbitrage

Décomposition des instruments financiers

Les décompositions permettent de valoriser des instruments complexes à partir d'instruments plus élémentaires.

Option BSM = TOR + COR

DDO: achat et vente de 2 options COR ou TOR avec la même maturité et des prix d'exercice différents: K1 et K2 avec $K1 < K2$

$$DDO = (S<K2).M - (S<K1).M = (S>K1).M - (S>K2).M$$

Changement de probabilité

Terme avec pay-off constant: Put TOR

$$\frac{K}{(1+r)^n}.\sum_{i=0}^{w}\binom{n}{i}.p^i.q^{n-i}$$

Terme avec pay-off égal à S_T put COR

$$=\frac{1}{(1+r).}\sum_{i=0}^{w}\binom{n}{i}.S.(u)^i.(d)^{n-i}(p)^i.(q)^{n-i}$$

$$=S.\sum_{i=0}^{w}\binom{n}{i}.\frac{(p.u)^i.(q.d)^{n-i}}{(1+r)^i.(1+r)^{(n-i)}}$$

$$=S.\sum_{i=0}^{w}\binom{n}{i}.(p*)^i.(q*)^{n-i}$$ avec

On retrouve la même formule que précédemment avec K actualisé remplacé par S, et (p,q) remplacé par (p*,q*) –

C’est un changement de probabilité

Valorisation des options Call et Put par le modèle binomial:

CALL

$$\text{CALL} = \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} . p^i . q^{n-i} \max(S.u^i.d^{n-i} - K, 0)$$

$$\text{CALL} = \sum_{i=wc}^{n} \binom{n}{i} . p*^i . q*^{n-i} S - \frac{K}{(1+r)^n} \sum_{i=wc}^{n} \binom{n}{i} . p^i . q^{n-i}$$

PUT

$$\text{PUT} = \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} . p^i . q^{n-i} \max(K - S.u^i.d^{n-i}, 0)$$

$$\text{PUT} = -\sum_{i=0}^{wp} \binom{n}{i} . p*^i . q*^{n-i} S + \frac{K}{(1+r)^n} \sum_{i=0}^{wp} \binom{n}{i} . p^i . q^{n-i}$$

Code VBA – BinomialUDR

GESTION DU CHANGE

```
Function BinomialUDR (PC, S, K, u, d, R, T, n)

Dim dt As Double, taux As Double, bin As Double, p As Double
Dim wc As Integer, i As Integer

dt = T / n
taux = (1 + R) ^ dt
p = (taux - d) / (u - d)
    bin = 0
    wc = Ceiling(Log(K / S / d ^ n) / Log(u / d), 1)
    Select Case PC
        Case "call":
            For i = wc To n
                bin = bin + COMB(n, i) * p ^ i * (1 - p) ^ (n - i) _
                * (S * u ^ i * d ^ (n - i) - K)
            Next i
        Case "put":
            For i = 0 To (wc - 1)
                bin = bin + COMB(n, i) * p ^ i * (1 - p) ^ (n - i) _
                * (K - S * u ^ i * d ^ (n - i))
            Next i
    End Select
    BinomialUDR = bin / (1 + taux) ^ n
End Function
```

Exercice

Marché : S=100 u=1,10 d=0,95 R=2%

Instrument: prix d'exercice: K = 105 durée: T=2 ans

Données: simulation avec n=21 pas

1 - Calculer: le taux d'intérêt de la période, les probabilité RN

2 - Produire l'arbre binomial du sous-jacent

3 - Produire l'arbre binomial des probabilités

4 - Calculer la valeur Wc pour le call et Wp pour le put, avec un K=105

5 - Calculer la valeur du call et du put

6 - Retrouver ces valeurs avec le programme VBA

7 - Donner une expression générale du Call à l'aide de la fonction LOI.BINOMIAL d'Excel

8 – Faire varier le nombre de pas: n – identifier la limite pratique de calcul sur n (en trouver la cause)

Exercice - Correction

GESTION DU CHANGE

S=100, u=1,10 d=,95 n=21, R=2%, T=2 ans

Instrument: Call Tout ou Rien avec K=105 et S = 100 euros

n=21

1+r = 1,001888

DF = (1+r)^n = 1,0404

p = 0,3459   p* = 0,3798

q = 0,6541   q* = 0,6202

w = 7,6802

wc = 8 wp=7

wc* = 13

VF Call = 13,0660, Call = 12,5586

VF Put = 14,0260, Put = 13,4813

Relation de Parité : S – K/(1+r)^n

A=LOI.BINOMIALE(13;21;0,6541;1) = 0,4476

B=LOI.BINOMIALE(13;21;0,6202;1) = 0,5775

C=LOI.BINOMIALE(7;21;0,3459;1) = 0,5524

D=LOI.BINOMIALE(7;21;0,3798;1) = 0,4225

call:
B 100 - A . 105 / DF
= 57,7429 – 45,1843 = 12,5586
put:
-(1-B) 100 + (1-A) . 105 / DF
= -42,2571 + 55,7385 = 13,4813

	call	put
21	12,5586	13,4813
50	19,2399	20,1627
100	27,1016	28,0243
200	37,6751	38,5978
500	56,3893	57,3120
1000	72,9909	73,9136

Options Digitales à Barrière

FINKEYS FRANCE

Les options digitales à barrière

- Définition des options digitales à barrière
- Classification des options digitales à barrière
- Comptage des chemins
- Le principe des miroirs

Exercices sur les digitales à barrières

03-01: modèle binomial avec 6 pas

03-02: modèle binomial avec 21 pas

Digitale à Barrière

Il faut distinguer:

- le comportement de l'option conditionnant le paiement:
- déclenchement de l'exercice
- déclenchement d'une barrière: annulation, création
- maturité, type américaine/américaine.
- le pay-off de l'option
- paiement lié au sous-jacent (asset) de manière simple S(T)
- paiement lié au sous-jacent de manière complexe f(S(T))
- paiement non lié au sous-jacent, soit un paiement « cash ».

Il existe 14 types élémentaires d'options digitales à barrière..

Options Digitale à Barrière

L'option digitale classique se réfère au prix du sous-jacent à l'échéance, avec un « trigger » qui dépend de la position du prix à terme et d'un prix de référence (K), nommé le prix d'exercice.

L'option digitale à barrière se réfère au prix du sous-jacent à tout moment, entre la date de début et la date de maturité (« option path dependant ») avec un « trigger » qui dépend de la position du prix par rapport à un montant fixe (L), nommé le niveau de barrière.

La barrière peut être « touchée » (activée) à tout moment durant la vie de l'option

Lorsque le sous-jacent atteint la barrière, l'option est soit activée (in), soit désactivée(out)

Dans le cas d'une option digitale, l'option activée va générer un paiement cash ou asset à l'échéance si la barrière est touchée et l'option désactivée va générer un paiement si la barrière n'est pas touchée.

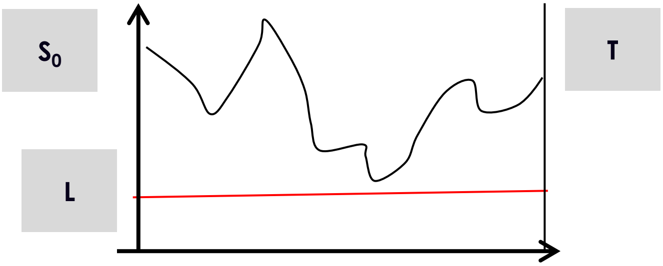
Digitale à Barrière

<u>Autrement dit:</u>

A l'origine, nous avons obligatoirement: $S_0>L$

option DI $\exists t, t \in [0,T], S(t) < L$

option DO $\forall t, t \in [0,T], S(t) > L$

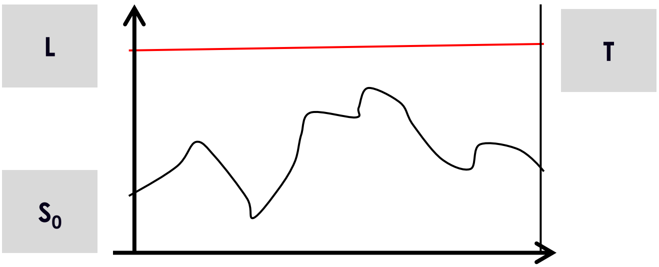


DI+DO=(1+R)^T

A l'origine, nous avons obligatoirement: $S_0<L$

option UI $\exists t, t \in [0,T], S(t) > L$

option UO $\forall t, t \in [0,T], S(t) < L$



UI+UO=(1+R)^T

Options Barrières Classiques

FINKEYS FRANCE

Options Barrières

Les options barrières « classiques », ont un pay-off « classique:

- Call, pay-off si option activée en T: max (S(T)-K,0)
- Put, pay-off si option activée en T: max (K-S(T),0)

L'activation/désactivation, dépend du niveau de barrière (L) et le pay-off dépend du prix d'exercice (K).

Ces options sont soit <u>régulières</u> (ou normales), soit « reverses » (voir les digitales).

Options barrières <u>régulières</u> (ou normales)

Down Call et Up Put

Options barrières <u>reverses</u>:

Up Call et Down Put

Digitale à Barrière – Profil de Risque

Les options barrières ont des comportements très variées, en fonction de la position du prix du sous-jacent (S) par rapport à la barrière (L) et au prix d'exercice (K).

Illustration sur un Call – si down: $L < S$,

Call « normal » (« down »), avec $L<K<S$ ou $L<S<K$ (barrière OTM):

Call « normal » (« down »), avec $K<L<S$ (barrière ITM):

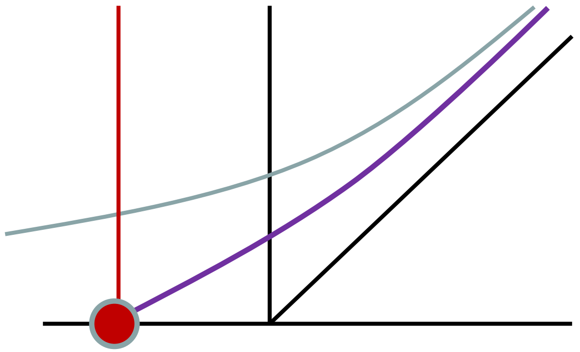
l'option « in », possède un profil de Put

Call « reverse » (« up »), avec $S<L<K$ (barrière OTM): option identique à une option vanille!

Call « reverse » (« up »), avec $S<K<L$ ou $K<S<L$ (barrière ITM): le profil de risque est peu différent de l'option vanille pour l'option « in », et donc l'option « out » possède une valeur faible

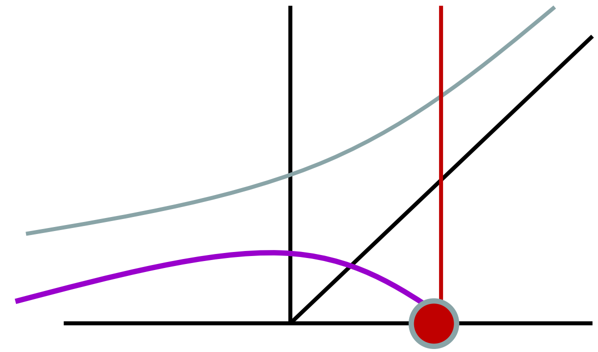
Graphiques

GESTION DU CHANGE

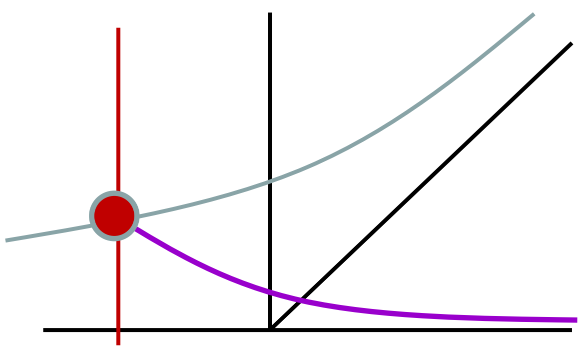


DOWN OUT - regular

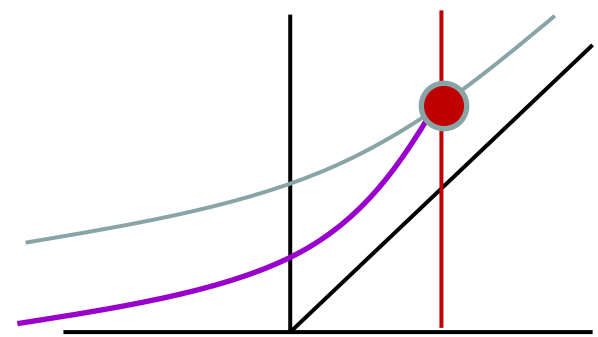
CALL



UP OUT – not regular



DOWN IN - regular



UP IN – not regular

Options à Barrière

Catégorie d'option avec prix d'exercice (K) et un niveau (L) de barrière.

Options « IN »: paiement à maturité, si l'option est dans la monnaie à maturité et si la barrière a été touchée (hit)

4 types d'options « IN » : CDI, PDI, CUI, PUI

Options « OUT »: paiement à maturité, si l'option est dans la monnaie à maturité et si la barrière n'a pas été touchée (no hit)

4 types d'options « OUT » : CDO, PDO, CUO, PUO

Parités:

CDI + CDO = CUI + CUO = CALL   et   PDI + PDO = PUI + PUO = PUT

$$\exists t, t \in [0,T], S(t) > L\_et\_, S(T) > K\_alors\_payS(T)$$

Options Quanto et Combo

FINKEYS FRANCE

Option Quanto

Option avec 2 sous-jacents: un prix et une devise.

$$\begin{cases} Fwd_1 : X(T)[S(T) - S^*] \\ Opt_1 : X(T).Max[S(T) - S^*, 0] \end{cases} \qquad \begin{cases} Fwd_2 : X^*[S(T) - S^*] \\ Opt_2 : X^*.Max[S(T) - S^*, 0] \end{cases}$$

$$\begin{cases} Fwd_3 : X(T).S(T) - X^*.S^* \\ Opt_3 : Max[X(T).S(T) - X^*.S^*, 0] \end{cases} \qquad \begin{cases} Fwd_4 : S(T).[X(T) - X^*] \\ Opt_4 : S(T).Max[X(T) - X^*, 0] \end{cases}$$

$$\begin{cases} Fwd_5 : S(T).X^* - X(T).S^* \\ Opt_5 : Max[S(T).X^* - X(T).S^*, 0] \end{cases} \qquad \begin{cases} Fwd_6 : S^*.(X(T) - X^*) \\ Opt_6 : S^*.Max[X(T) - X^*, 0] \end{cases}$$

(1): risque en S, et conversion à S(T)

(2): option quanto, risque en S, cours de conversion connu d’avance

(3): option combo, variable X.S

(4): equity linked fx contract

Forward et SwapQuanto

Forward Quanto.

Un modèle par arbitrage, identique à celui utilisé pour le change à terme n'est pas possible

$$\begin{cases} Fwd_2 : X * [S(T) - S*] \\ Fwd_3 : X(T).S(T) - X * .S * \end{cases}$$

C'est un produit « multi-asset »

C'est aussi un produit de « corrélation »

Swap Quanto.

C'est un swap, dont une jambe applique un taux d'intérêt à un nominal libellé dans une autre devise.

C'est un produit de spread.

Option Quanto

Quanto Option:

Le prix du sous-jacent et le prix d'exercice sont libellés dans la même devise.

La conversion dans la devise locale s'effectue, soit avec un cours donné d'avance (fixed) soit avec le cours donné à l'échéance (variable).

Notations :

- $\mathbf{S^F}$: Prix en devise étrangère
- $\mathbf{K^F}$: Prix d'exercise en devise étrangère
- $\mathbf{S_X}$: FX Spot
- $\mathbf{S_X^h}$: Spot Rate à maturité
- $\mathbf{S_0^F}$: FX Spot Rate $\mathbf{t_0}$ initial

$$S_0^F \times Max\left[S^F - K^F, 0\right]$$

$$S_X^h \times Max\left[S^F - K^F, 0\right]$$

Option Combo

Combo Option:

Le prix du sous-jacent et le prix d'exercice sont libellés dans des devises différents.

La conversion dans la devise locale s'effectue uniquement sur le prix du sous-jacent.

Notations :

- $\mathbf{S^F}$: Prix en devise étrangère
- $\mathbf{K^F}$: Prix d'exercise en devise étrangère
- $\mathbf{S_X}$: FX Spot
- $\mathbf{S_X^h}$: Spot Rate à maturité

$$Max\left[S_X^h \times S^F - K^E, 0\right]$$